Mathématiques

Lycée THIERS
Année 24-25

Devoir surveillé n° 8

1BCPST 2

24 mai 2025
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Série de la fonction exponentielle et applications*

On rappelle que $0! = 1! = 1$ et $n! = 1 \times \cdots \times n$ pour un entier $n \geqslant 2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite notée ℓ.
2. Montrer que $2 \leqslant \ell \leqslant 3$.
3. (a) Écrire une fonction `facto(n)` d'argument $n \in \mathbb{N}$ qui renvoie la valeur de $n!$.
   (b) Écrire une fonction `somme(n)` d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ qui renvoie la valeur de S_n.
   (c) Écrire une fonction `approx(p)` de paramètre $p \in \mathbb{R}_+^*$ qui renvoie une approximation de ℓ à p près.
4. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\,dt$$

5. Montrer par récurrence que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,dt$$

6. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0, x]$, $\quad (x-t)^n\,\mathrm{e}^t \leqslant (x-t)^n\,\mathrm{e}^x$.
7. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^x}{(n+1)!}$.
8. Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ après avoir justifié son existence.
9. En déduire la valeur de ℓ.
10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.
    (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. À partir de maintenant f désignera ce prolongement. Préciser la valeur de f en 0.
    (b) Pour $x > 0$, on note $T_0(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $T_0(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}}{x^2}$.
    (c) À l'aide d'une question précédente, montrer que la fonction T_0 admet une limite finie en 0 que l'on calculera.
    (d) Qu'en déduit-on pour f ? Donner une équation de la tangente à la courbe de f en 0.

Exercice 2. *Suite définie implicitement et suite récurrente*

On considère la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^x - 1 + \ln(1+x)$. On donne $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$ et $0,6 < \ln 2 < 0,7$.

1. Étudier g.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $g(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution que l'on notera u_n.
   (b) Établir l'encadrement $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Comparer $g(u_n)$ et $g(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (d) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite a vérifiant $g(a) = 0$. En déduire la valeur de a.
   (e) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{g(u_n)}{u_n} = 2$. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On définit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
   (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} > v_n$. Qu'en déduit-on pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) On pose $h(x) = g(x) - x$. En étudiant h, démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) > 0$. Qu'en déduit-on pour les points fixes de g dans $\mathbb{R}_+$?
   (d) Démontrer par l'absurde que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
4. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. *Suite récurrente, une autre approche*

Soit la fonction φ définie par $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$ et la suite récurrente définie par $w_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \varphi(w_n)$.

1. Résoudre l'équation $\varphi(x) = x$. On notera b sa solution.
2. Justifier que $\varphi(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ puis démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \dfrac{|x-y|}{2}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_{n+1} - b| \leqslant \dfrac{1}{2}|w_n - b|$.
5. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|w_n - b| \leqslant 2 \times \dfrac{1}{2^n}$.
6. Justifier la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.
7. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4. *Valeur moyenne d'une fonction et méthode des rectangles*

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue f sur le segment $[a,b]$ est le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Écrire une fonction python `moyenne(n)` qui renvoie la valeur moyenne de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $[0,2]$ en utilisant la méthode des rectangles avec n intervalles. On commencera par importer la bibliothèque *math*.