

Exercice 1

On pose $e_1 = (1, -1, 2)$ et $e_2 = (1, 1, -1)$.

Est-ce que les vecteurs $v_1 = (3, 1, 0)$ et $v_2 = (4, 1, 0)$ sont combinaisons linéaires de e_1 et e_2 ? Expliciter, si possible, ces combinaisons linéaires.

Exercice 2

Déterminer une représentation paramétrique et des équations cartésiennes du SEV E .

1. $E = \text{Vect}((-2, 3))$
2. $E = \text{Vect}((3, -1, 2))$
3. $E = \text{Vect}((1, 2, -3), (3, 1, 2))$
4. $E = \text{Vect}((1, 2, 1, 4), (1, 2, 3, -1), (-1, -2, -7, 11))$

Exercice 3

Déterminer une représentation paramétrique et une famille génératrice du SEV E .

1. $(x, y) \in E \iff 2x + 5y = 0$
2. $(x, y, z) \in E \iff 3x - 2y + z = 0$
3. $(x, y, z) \in E \iff \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ -2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$
4. $(x, y, z, t) \in E \iff \begin{cases} 4x - 2y + z + 4t = 0 \\ 3x - y - z + t = 0 \\ -x - y + 5z + 5t = 0 \end{cases}$

Exercice 4

Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, déterminer si elle est libre ou liée. Lorsqu'elle est liée, donner une relation linéaire entre ses vecteurs.

1. $\mathcal{F}_1 = ((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6))$.

Retrouver ce résultat avec la fonction python `np.linalg.matrix_rank`.

2. $\mathcal{F}_2 = ((1, i, 1 - i), (-i, 1, -1 - i))$
3. $\mathcal{F}_3 = ((1, 1, 0), (0, -1, 1), (1, 0, a))$ où a est un paramètre réel.

Exercice 5

Pour les familles de vecteurs suivantes, déterminer si elles sont génératrices de l'espace $\mathbb{K}^n$ considéré. Lorsqu'elles ne le sont pas, donner un exemple de vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

1. $\mathcal{F}_1 = ((0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 0, -2))$

2. $\mathcal{F}_2 = ((1, i), (1, 0), (i, i))$

3. $\mathcal{F}_3 = ((1, 2, 0), (0, -2, 1), (1, 0, 1))$. Utiliser 4 méthodes dont 1 informatique.

Exercice 6

Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, et pour chacun d'eux, en donner une base et la dimension.

1. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$
2. $B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \right\}$
3. $C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x + z = -1 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \right\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = 0\}$
5. $E = \{(a, a - b, a + b, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
6. $F = \{(a + 3b + c, 2a + b - 3c, -a - 2b), (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}$.

Exercice 7

On considère les ensembles suivants :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}, F = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - 2y + z = 0\},$$

$$G = \{(\lambda - \mu, \lambda + \mu, 2\lambda - 3\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}, H = \{(\lambda + \mu, 2\lambda + \mu, \lambda + 2\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}.$$

1. Montrer que ces quatre ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $E \cap F$, $E \cap G$, $G \cap H$.

Exercice 8

Soit (u, v, w) une famille libre de $\mathbb{K}^n$.

Donner un minorant de n . Montrer que $(u + v, v + w, w + u)$ est une famille libre.

Exercice 9 (Une famille de vecteurs à paramètre)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $v_1 = (1, 1, m)$, $v_2 = (2, m + 1, 2)$, $v_3 = (m, 1, 1)$, $u = (x, y, z)$.

On note $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

1. Pour $m = 1$, déterminer une base et la dimension de E .
Jusqu'à la fin de l'exercice on supposera que $m \neq 1$.

2. On considère le système (S)
$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + m\gamma = x \\ \lambda + (m + 1)\mu + \gamma = y \\ m\lambda + 2\mu + \gamma = z \end{cases}$$
 d'inconnues λ, μ, γ .

Montrer que u appartient à E (c'est-à-dire u est une combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3) si et seulement si (S) est compatible.

- Échelonner (S) par la méthode du pivot. On ne cherchera pas à résoudre (S) .
- On suppose que $m = -3$.
 - Montrer que $u \in E \iff x + 2y + z = 0$.
 - En déduire une base de $E \cap F$ où $F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.
 - Montrer que (v_1, v_2) est une base de E .
- On suppose que $m \notin \{-3, 1\}$.
Justifier que (S) admet une unique solution. Qu'en déduit-on pour (v_1, v_2, v_3) ?
- On suppose que $m = 0$ et on note $u_1 = (2, 2, 0)$, $u_2 = (0, -1, 2)$, $u_3 = (1, 4, 0)$.
Finir la résolution de (S) et en déduire la matrice des coordonnées de la famille (u_1, u_2, u_3) dans la base (v_1, v_2, v_3) . Quelle est la particularité de cette matrice ?

Exercice 10

- Montrer que l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / x - 2y + z = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{K}^3$ dont on donnera une représentation paramétrique, une base et la dimension.
- Soit $F = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 1)$ et $v = (3, 1, -1)$.
Montrer que (u, v) est une base de F . Vérifier que $F \subset E$ et en déduire que $F = E$.
- Déterminer les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) de E dans la base (u, v) en fonction de x, y et z .
- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ et $w = (1, 0, 0)$.
 - Déterminer $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $(x, y, z) - \lambda w \in E$.
 - En déduire que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.
 - Donner les coordonnées de (x, y, z) dans $\mathcal{B}$.
 - Déterminer une équation cartésienne pour chacun des SEV $\text{Vect}(u, w)$ et $\text{Vect}(v, w)$.

Exercice 11

Déterminer le rang de chacune des familles suivantes par une méthode matricielle. Sont-elles libres ? Sont-elles génératrices de $\mathbb{K}^n$? Sont-elles des bases de $\mathbb{K}^n$?

Vérifier vos résultats avec la fonction python `np.linalg.matrix_rank`.

- $\mathcal{F}_1 = ((2, 1, 1, 1); (1, 2, 1, 1); (1, 1, 2, 1))$
- $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 0, 1); (1, -1, 1, 0); (2, 0, 1, 1); (0, -2, 1, -1))$
- $\mathcal{F}_3 = ((1, 0, 1); (0, 1, 1); (1, 1, 0))$
- $\mathcal{F}_4 = ((1, 1, 1); (1, -1, 1); (1, 1, -1); (1, -1, -1))$.

Exercice 12

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y\}$

- Vérifier que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
- Montrer que $E \cap F$ est de dimension 2 et en donner une base $\mathcal{B} = (u, v)$.
- Déterminer une base de E de la forme (u, v, w) .
- Déterminer une base de F de la forme (u, v, w') .
- Montrer que (u, v, w, w') est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 13

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^5$.

Que dire du caractère libre ou générateur de $\mathbb{R}^5$ de la famille $\mathcal{F}$ dans les cas suivants ?

- (1) $p = 5$, (2) $p = 7$, (3) $p = 2$, (4) $p = 6$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) = 5$, (5) $p = 3$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) = 3$,
(6) $p = 5$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) = 3$, (7) $p = 4$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) = 5$, (8) $p = 7$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) = 6$

Exercice 14 (Matrices d'une famille de vecteurs dans deux bases)

Soit $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

- Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- On pose $v_1 = (1, 2, 4)$, $v_2 = (3, -1, 0)$ et $v_3 = (-7, 7, 8)$.
Déterminer les matrices de (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$.
Pour la deuxième matrice on utilisera deux méthodes :

Première méthode. On cherchera les coordonnées du vecteurs (a, b, c) dans $\mathcal{B}$.

Deuxième méthode. On exprimera les vecteurs u_1, u_2, u_3 en fonction des vecteurs e_1, e_2, e_3 de la base canonique puis on exprimera les vecteurs e_1, e_2, e_3 en fonction de u_1, u_2, u_3 .

- Utiliser trois méthodes dont 1 informatique pour déterminer le rang de (v_1, v_2, v_3) .
- (v_1, v_2, v_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 15 (Inclusion de SEV)

On considère les SEV de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$E = \text{Vect}((1, -1, 3, -2), (-2, 2, -5, 3), (-3, 3, 7, -10), (2, -2, 1, 1))$

$F = \text{Vect}((1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, -2), (1, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$

E_1 le SEV de $\mathbb{R}^4$ d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + y - 3z + 2t = 0 \\ 3x + 2y - 5z + 4t = 0 \end{cases}$

F_1 le SEV de $\mathbb{R}^4$ d'équation cartésienne $x - y + 5z - 2t = 0$.

- Démontrer que $E \subset F$.
- Démontrer que $E_1 \subset F_1$.
- A-t-on $E_1 \subset F$?