**1BCPST2 Thiers**

# Résumé sur la dérivabilité

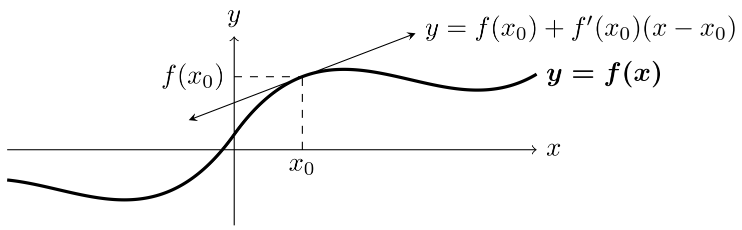
*$I$ désigne un intervalle non vide et non réduit à un point*

## 1 Dérivabilité en un point

**Définitions**

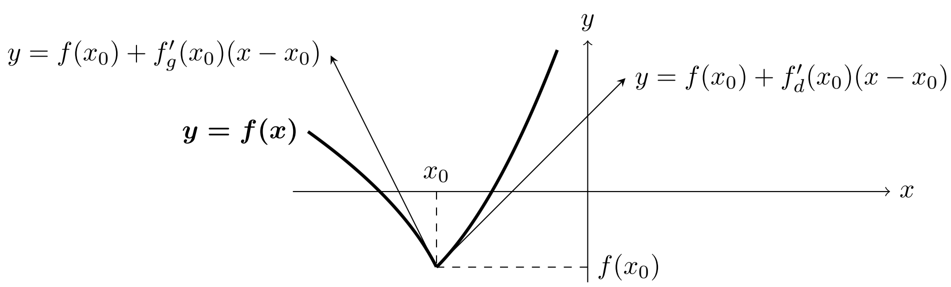
1. On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $x_0$, dans ce cas, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé nombre dérivé de $f$ en $x_0$ et noté $f'(x_0)$ ou bien $\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0}$.
2. En pratique, on se ramène souvent au point d'étude 0 : $f$ est dérivable en $x_0 \iff \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$

   Si cette condition est satisfaite, on a alors $f'(x_0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$.
3. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0$ est la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, c'est la droite qui approche le mieux $\mathscr{C}_f$ au voisinage de ce point.




4. On dit que $f$ est dérivable à gauche (resp. à droite) en $x_0$ si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $x_0$ par valeurs inférieures (resp. supérieures), dans ce cas, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (resp. $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) est appelé nombre dérivé à gauche (resp. à droite) de $f$ en $x_0$ et noté $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$).

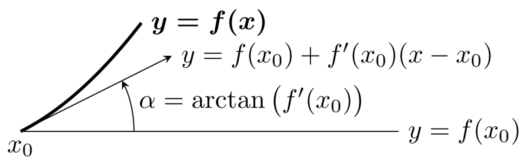
   Si $f$ est dérivable à gauche (resp. à droite) en $x_0$, la demi-tangente à gauche (resp. à droite) est la demi-droite d'équation $y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$ (resp. $y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$).



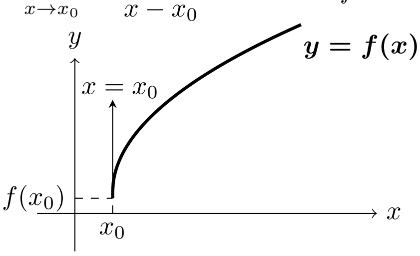

Point anguleux

Lorsque $f$ est définie sur un intervalle du type $[x_0, b]$ ou $[x_0, b[$, on parle indistinctement de dérivée en $x_0$ ou de dérivée à droite en $x_0$, et de tangente au point d'abscisse $x_0$ ou de demi-tangente en ce point.

Lorsque $f$ est dérivable en $x_0$, on a :




Si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ et $f$ continue en $x_0$ alors $\mathscr{C}_f$ admet au point $x_0$ une tangente verticale :




C'est le cas pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en l'origine.

**Propriétés.** On suppose que $f$ est définie **autour** de $x_0$.

1. $f$ est dérivable en $x_0 \iff f$ est dérivable à gauche et à droite en $x_0$ et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.
   Dans ce cas on a : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
2. Si $f$ est dérivable (resp. dérivable à gauche, dérivable à droite) en $x_0$ alors $f$ est continue (resp. continue à gauche, continue à droite) en $x_0$. On dit que la dérivabilité entraîne la continuité.
   La réciproque est fausse comme le montre la fonction valeur absolue en 0.

# 2 Dérivation sur une partie

**Définitions**

1. On dit que $f$ est dérivable sur $E$ si elle est dérivable en tout point de $E$. Sur cet ensemble, on définit alors la fonction dérivée de $f$ par $f' : x \mapsto f'(x)$. $f'(x)$ est aussi noté $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.
2. L'ensemble ou domaine de dérivabilité est l'ensemble de tous les points en lesquels $f$ est dérivable.

| Fonctions | Domaines de dérivabilité | | | Dérivées |
|---|---|---|---|---|
| $x \mapsto e^x$ | $\mathbb{R}$ | | | $x \mapsto e^x$ |
| $x \mapsto \ln x$ | $\mathbb{R}_+^*$ | | | $x \mapsto \frac{1}{x}$ |
| $x \mapsto x^\alpha$ | $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ | $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \smallsetminus \mathbb{N}$ | $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ | $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | | | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $\mathbb{R}_+^*$ | | | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $\mathbb{R}$ | | | $x \mapsto \cos x$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $\mathbb{R}$ | | | $x \mapsto -\sin x$ |
| $x \mapsto \tan x$ | $\mathbb{R} \smallsetminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ | | | $x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $x \mapsto \arctan x$ | $\mathbb{R}$ | | | $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ |
| $e^u$ | $D$ | | | $u'e^u$ |
| $\ln(\lvert u \rvert)$ | $D^*$ | | | $\frac{u'}{u}$ |
| $u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ | $D$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ | $D^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \smallsetminus \mathbb{N}$ | $D_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ | $\alpha u' u^{\alpha-1}$ |
| $\frac{1}{u}$ | $D^*$ | | | $-\frac{u'}{u^2}$ |
| $\sqrt{u}$ | $D_+^*$ | | | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $\sin(u)$ | $D$ | | | $u' \cos(u)$ |
| $\cos(u)$ | $D$ | | | $-u' \sin(u)$ |
| $\tan(u)$ | $\{x \in D,\ u(x) \in \mathscr{D}_{\tan}\}$ | | | $u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$ |
| $\arctan(u)$ | $D$ | | | $\frac{u'}{1+u^2}$ |

$u$ est une fonction dérivable sur un domaine $D$

On définit $D_+^* = \{x \in D,\ u(x) > 0\}$ et $D^* = \{x \in D,\ u(x) \neq 0\}$

Ce tableau doit être connu parfaitement

**Dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composition, de la réciproque**

1. La somme, le produit et le quotient de fonctions dérivables sur $E$ sont des fonctions dérivables sur $E$ (si le dénominateur du quotient ne s'annule pas). On a alors :

   $(\lambda f+\mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ et $(fg)' = f'g + fg'$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

   si $f, g$ sont des fonctions dérivables sur $E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
2. Si $f$ est dérivable sur $D$, $g$ dérivable sur $E$ et $\forall x \in D,\ f(x) \in E$ alors $g \circ f$ est dérivable sur $D$ et sur cet ensemble $(g\circ f)'(x) = f'(x)\, g'\big(f(x)\big)$.
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement monotone sur l'intervalle $I$. Celle-ci réalise une bijection (encore notée $f$) et on a la formule :

   $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ qui est valable partout où $f' \circ f^{-1}$ ne s'annule pas.

   Si $f' \circ f^{-1}(y_0) = 0$ alors $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ a une tangente verticale au point d'abscisse $y_0$.

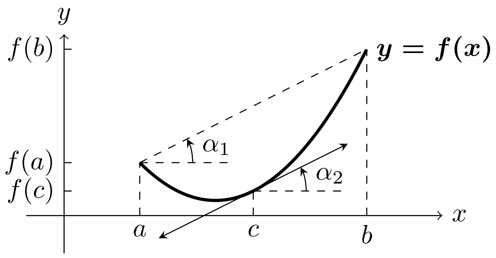
Par exemple si $f(1) = 2$ et $f'(1) \neq 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable en 2 et $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)}$.

Pour déterminer les points en lesquels $f^{-1}$ n'est pas dérivable, on commence par chercher les points qui annulent $f'$ en résolvant l'équation $f'(x) = 0$. Si $f'(x_0) = 0$ alors on va chercher $y_0$ tel que $x_0 = f^{-1}(y_0)$ qui est équivalent à $f(x_0) = y_0$. On a alors $f'(f^{-1}(y_0)) = f'(x_0) = 0$ ce qui implique que $f^{-1}$ n'est pas dérivable en $y_0$.
En procédant de la sorte avec tous les nombres qui annulent $f'$, on obtient tous les nombres en lesquels $f^{-1}$ n'est pas dérivable.

# 3 Théorème des accroissements finis et conséquences

**Théorème (ou formule) des accroissements finis**

Soit $f$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.




$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ et $\alpha_2 = \arctan\big(f'(c)\big)$ donc $\alpha_1 = \alpha_2$, ce qui entraîne que la droite passant par les points d'abscisses $a$ et $b$ est parallèle à la tangente au point d'abscisse $c$.

**Fonctions monotones et strictement monotones : définitions**

1. La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si pour tout $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).
2. La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante (resp. décroissante) si pour tout $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$).

**Conséquences du théorème des accroissements finis**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$.

1. Si $f'$ est strictement positive (resp. strictement négative) éventuellement en dehors d'un nombre fini de points alors $f$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $I$.
2. $f$ est croissante (resp. décroissante) si, et seulement si, $f'$ est positive (resp. négative) sur $I$.
3. $f$ est constante si, et seulement si, $f'$ est identiquement nulle.

La condition $f' = 0$ ne suffit pas à démontrer que $f$ est constante, il faut aussi supposer que l'on est sur un intervalle.

Dans le premier point on peut même supposer que $f$ est continue sur $I$ et dérivable sur $I$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. On obtient ainsi la stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$ et de la fonction $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

# 4 Dérivées d'ordres supérieurs

**Définitions**

On considère une fonction $f$ définie sur une réunion d'intervalles $E$.

1. Si $f$ est dérivable, on peut considérer sa fonction dérivée $f'$. Si cette fonction dérivée est elle même dérivable, on peut considérer sa fonction dérivée appelée dérivée seconde de $f$ et notée $f''$. En répétant cette opération, on peut définir une succession de fonctions $f, f', f'', f^{(3)}, ...$ dont chacune est la fonction dérivée de la précédente. Par convention, $f^{(0)} = f$.
2. On dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur $E$ si l'opération précédente peut se répéter au moins $n$ fois sur $E$.
3. On dit que $f$ est de classe $\mathrm{C}^n$ sur $E$ si $f$ est $n$ fois dérivable sur $E$ et si $f^{(n)}$ est continue sur $E$. On note $\mathrm{C}^n(E, \mathbb{R})$ ou $\mathrm{C}^n(E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathrm{C}^n$ sur $E$.
4. On dit que $f$ est de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur $E$ (ou qu'elle est indéfiniment dérivable sur $E$) si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f$ est $k$ fois dérivable sur $E$. On note $\mathrm{C}^\infty(E, \mathbb{R})$ ou $\mathrm{C}^\infty(E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur $E$.

**Régularité des fonctions usuelles**

1. Les fonctions polynômes, puissance, exponentielle, logarithme népérien, sinus, cosinus, tangente, arctangente sont de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.
2. La fonction racine carrée est de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas dérivable en 0.

**Opérations algébriques et compositions de fonctions de classe $\mathrm{C}^k$ ou $\mathrm{C}^\infty$**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $E$ et $A$ des parties de $\mathbb{R}$. .

1. Si $f, g \in \mathrm{C}^n(E)$ (resp. $\mathrm{C}^\infty(E)$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda f + \mu g) \in \mathrm{C}^n(E)$ (resp. $\mathrm{C}^\infty(E)$), $fg \in \mathrm{C}^n(E)$ (resp. $\mathrm{C}^\infty(E)$) et $\dfrac{f}{g} \in \mathrm{C}^n(E)$ (resp. $\mathrm{C}^\infty(E)$) si le dénominateur ne s'annule pas. On a également :
$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)} \text{ (linéarité de la dérivation } n \text{ fois)}$$
2. Si $f$ est de classe $\mathrm{C}^n$ (resp. $\mathrm{C}^\infty$) sur $E$, $g$ est de classe $\mathrm{C}^n$ (resp. $\mathrm{C}^\infty$) sur $A$ et $f(E) \subset A$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathrm{C}^n$ (resp. $\mathrm{C}^\infty$) sur $E$.