1bio2 Thiers

Résumé sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et par n un nombre entier naturel non nul. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

1 Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Définitions

- Les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont appelés vecteurs, ils sont de la forme $u = (x_1, \dots, x_n)$ où $x_i \in \mathbb{K}$ (x_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de u).
- Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est celui dont toutes les composantes sont nulles. On le note $0_{\mathbb{K}^n}$ ou $\vec{0}$ ou 0.
- On identifie $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, ce qui permet :
  1. de définir les opérations de somme de vecteurs et de produit d'un vecteur par un scalaire,
  2. de transférer les propriétés de ces opérations matricielles à $\mathbb{K}^n$.
- Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ alors $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$ est appelée **combinaison linéaire** (CL) des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ de $\mathbb{K}^n$.

$\mathbb{K}^n$ est appelé espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

Un sous-espace vectoriel (SEV) de $\mathbb{K}^n$ est une partie E de $\mathbb{K}^n$ vérifiant :

1. $0_{\mathbb{K}^n} \in E$,
2. pour tout $(u, v) \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda u + \mu v \in E$.

Propriétés

- Un SEV de $\mathbb{K}^n$ contient toujours le vecteur nul $0_{\mathbb{K}^n}$.
- $\mathbb{K}^n$ et $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ sont des SEV de $\mathbb{K}^n$. Le SEV $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ est appelé sous-espace nul, il est parfois noté 0.
- L'intersection de plusieurs SEV de $\mathbb{K}^n$ est un SEV de $\mathbb{K}^n$.

Définition du SEV engendré par une famille de vecteurs

Le SEV engendré par les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des CL de ces vecteurs, on le note $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Par convention $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{\vec{0}\}$.

Pour montrer que E est un SEV de $\mathbb{K}^n$ il suffit de trouver $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ tels que $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène à n inconnues est un SEV de $\mathbb{K}^n$.

3 Familles génératrices de E, familles libres, bases de E

Définition d'une famille génératrice d'un SEV E de $\mathbb{K}^n$

On dit que la famille de vecteurs de E $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice de E si $\mathrm{Vect}(u_1, ...u_p) = E$.

Autrement dit, une famille est génératrice de E si elle engendre E. Par convention la famille vide de $\mathbb{K}^n$ est génératrice de $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Technique. Soit E un SEV de $\mathbb{K}^n$.
Pour montrer que $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille génératrice de E, il suffit de vérifier que :

1. $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $u_i \in E$,
2. tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_p$.

Propriétés des familles génératrices. Soit E un SEV de $\mathbb{K}^n$.

- Toute famille de vecteurs de E contenant une famille génératrice de E est elle même génératrice de E.
- Si à une famille génératrice de E on retire un vecteur CL des autres, on obtient à nouveau une famille génératrice de E.

Définitions d'une famille libre et d'une famille liée de $\mathbb{K}^n$

- La famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si pour tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{K}^n}$ on a : $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.
- La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée si elle n'est pas libre c-à-d s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, **non tous nuls** tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Les expressions *libre* et *linéairement indépendante* ont la même signification.

Propriétés des familles libres et des familles liées

- Soit $u \in \mathbb{K}^n$. La famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_{\mathbb{K}^n}$.
- Deux vecteurs sont libres si et seulement s'ils ne sont pas proportionnels (on dit qu'ils ne sont pas colinéaires).
- Si une famille de vecteurs contient le vecteur nul alors elle est liée.
- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une famille contenant une famille liée est liée.
- Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres.
- Si à une famille libre on ajoute un vecteur qui n'est pas CL des vecteurs de cette famille, on obtient une famille libre.

Définitions d'une base et de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit E un SEV de $\mathbb{K}^n$.
- On appelle base de E une famille à la fois libre et génératrice de E.
- La famille : $\Big((1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, on l'appelle base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Propriété d'existence et d'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base.
Soit E un SEV de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}$ une base de E.
Tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$.

Par convention, la famille vide est l'unique base de $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Définition-propriétés. Soit E un SEV de $\mathbb{K}^n$.
- Tous les SEV de $\mathbb{K}^n$ ont au moins une base.
- Toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre de vecteur(s), ce nombre est appelé dimension de E et noté $\dim E$.

Un SEV de $\mathbb{K}^n$ de dimension 1 (resp. 2) est appelé droite vectorielle (resp. plan vectoriel). $\dim\{0_{\mathbb{K}^n}\}=0$ et $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Propriétés et conséquences
Soit E et F deux SEV de $\mathbb{K}^n$.
- Si $E\subset F$ alors $\dim E \leqslant \dim F$.
- Si $E\subset F$ et $\dim E=\dim F$ alors $E=F$.

La dimension d'un SEV de $\mathbb{K}^n$ est un nombre entier compris entre 0 et n.
$\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ est le seul SEV de $\mathbb{K}^n$ de dimension 0. $\mathbb{K}^n$ est le seul SEV de $\mathbb{K}^n$ de dimension n.

Propriétés et technique. Soit E un SEV de $\mathbb{K}^n$.
Soit $u_1,\ldots,u_p$ des vecteurs de E.
- Si $(u_1,\ldots,u_p)$ est libre alors $p\leqslant \dim E$.
- Si $(u_1,\ldots,u_p)$ est libre et $p=\dim E$ alors cette famille est une base de E.
- Si $(u_1,\ldots,u_p)$ est génératrice de E alors $p\geqslant \dim E$.
- Si $(u_1,\ldots,u_p)$ est génératrice de E et $p=\dim E$ alors cette famille est une base de E.

Pour montrer qu'une famille de vecteurs de E est une base de E il suffit de montrer que le nombre de vecteurs qu'elle possède est égal à la dimension de E et qu'elle est, **au choix**, libre **ou** génératrice de E.

Définition des coordonnées d'un vecteur dans une base. Soit E un SEV de $\mathbb{K}^n$.

Soit u un vecteur de E et $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_p)$ une base de E. On dit que $\lambda_1,\ldots,\lambda_p\in\mathbb{K}$ sont les coordonnées de u dans $\mathscr{B}$ si $u=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i$.

La matrice de u dans $\mathscr{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, est la matrice colonne des coordonnées de u dans $\mathscr{B}$. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. La matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est la matrice du $j^{\text{ème}}$ vecteur de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Si u,v sont des vecteurs de E et λ,μ des scalaires alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda u+\mu v)=\lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)+\mu\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$.

4 Rang d'une famille de vecteurs

Définition du rang d'une famille de vecteurs
Pour $u_1,\ldots,u_q$ dans $\mathbb{K}^n$, on définit le rang de ces vecteurs par : $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_q)=\dim\Big(\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_q)\Big)$.

Techniques pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs.
Soit E un SEV de $\mathbb{K}^n$. On considère une famille de vecteurs $(u_1,\ldots,u_q)$ de E.

Par extraction de vecteur.
Si u_k est une CL des vecteurs $u_1,\ldots,u_{k-1},u_{k+1},\ldots,u_q$ alors $\mathrm{rg}\,(u_1,\ldots,u_q)=\mathrm{rg}\,(u_1,\ldots,u_{k-1},u_{k+1},\ldots,u_q)$.
On pourra extraire de nouveaux vecteurs jusqu'à obtenir une famille libre (dont le rang sera donc égal au nombre de vecteurs).

À l'aide de la matrice de la famille dans une base de E.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E et M la matrice de $(u_1,\ldots,u_q)$ dans $\mathscr{B}$. On a $\mathrm{rg}\,(u_1,\ldots,u_q)=\mathrm{rg}\,(M)$.
Autrement dit, le rang d'une famille de vecteurs de E est égal au rang de sa matrice dans n'importe quelle base de E.
Pour calculer $\mathrm{rg}\,(M)$ on peut, par exemple, échelonner M et compter le nombre de ses pivots.

Le rang de $(u_1,\ldots,,u_q)$ est aussi égal au rang du système d'inconnues $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ obtenu à partir de l'égalité $\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_qu_q=0_{\mathbb{K}^n}$.

Propriétés. Soit E un SEV de $\mathbb{K}^n$.
Soit $u_1,\ldots,u_q$ des vecteurs de E. On pose $p=\dim(E)$.
- $\mathrm{rg}\,(u_1,\ldots,u_q)\leqslant p$ et $\mathrm{rg}\,(u_1,\ldots,u_q)\leqslant q$.
- $\mathrm{rg}\,(u_1,\ldots,u_q)=q \iff (u_1,\ldots,u_q)$ est libre.
- $\mathrm{rg}\,(u_1,\ldots,u_q)=p \iff (u_1,\ldots,u_q)$ est génératrice de E.
- $\mathrm{rg}\,(u_1,\ldots,u_q)=p=q \iff (u_1,\ldots,u_q)$ est une base de E.