Mathématiques

Lycée THIERS
Année 24-25

Devoir surveillé n° 8

1BCPST 2

24 mai 2025
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Série de la fonction exponentielle et applications*

1. On va montrer que ces deux suites sont adjacentes.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} - \cancel{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

   donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et même strictement croissante.

   $$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - S_n - \frac{1}{n\times n!} = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!} = \frac{1}{(n+1)\times n!} + \frac{1}{(n+1)^2\times n!} - \frac{1}{n\times n!} \\ &= \frac{(n+1)n}{(n+1)^2\times n\times n!} + \frac{n}{(n+1)^2\times n\times n!} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2\times n\times n!} \\ &= \frac{(n^2+n)+n-(n^2+2n+1)}{(n+1)^2\times n\times n!} = \frac{-1}{(n+1)^2\times n\times n!} < 0 \end{aligned}$$

   donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et même strictement décroissante.

   $T_n - S_n = \frac{1}{n\times n!}$

   Par produit et quotient, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\times n!} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} T_n - S_n = 0$.

   D'après ce qui précède $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites adjacentes or deux suites adjacentes convergent vers la même limite donc $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent vers la même limite.}}$

   Pour la suite on note $\ell = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

2. Le théorème des suites adjacentes dit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant \ell \leqslant T_n$ et en particulier $S_1 \leqslant \ell \leqslant T_1$.

   $S_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 1 + 1 = 2$ et $T_1 = S_1 + \frac{1}{1\times 1!} = 2 + 1 = 3$ d'où $\boxed{2 \leqslant \ell \leqslant 3}$

3. (a)
```
def facto(n):
    f=1
    for k in range(1,n+1):
        f=f*k
    return f
```
   (b)
```
def somme(n):
    s=0
    for k in range(n+1):
        s+=1/facto(k)
    return s
```

   Alternative plus efficace mais un peu plus délicate à coder :

```
def sommeBis(n):
    s,f = 0,1
    for k in range(n+1):
        s,f = s+1/f,f*(k+1)
    return s
```

(c)
```
def approx(p):
    n=1
    while 1/(n*facto(n))>p:
        n+=1
    return somme(n)
```

Alternative plus efficace mais un peu plus délicate à coder :

```
def approxBis(p):
    s,n = 2,1
    while 1/(n*facto(n))>p:
        s,n = s+1/facto(n+1),n+1
    return s
```

Alternative encore plus efficace mais plus délicate à coder :

```
def approxTer(p):
    s,f,n = 2,1,1
    while 1/(n*f)>p:
        n += 1
        f *= n
        s += 1/f
    return s
```

4. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,dt$ on choisit $u'(t)=\dfrac{(x-t)^n}{n!}$ et $v(t)=\mathrm{e}^t$

   La fonction $t\mapsto (x-t)^n$ est de la forme $-w'w^n$ avec $w(t)=x-t$ donc $t\mapsto (x-t)^n$ se primitive en $-\frac{w^{n+1}}{n+1}$ par conséquent $t\mapsto \frac{(x-t)^n}{n!}$ se primitive en $-\frac{w^{n+1}}{(n+1)!}$ donc on choisit $u(t)=-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$.

   On a également $v'(t)=\mathrm{e}^t$. Les fonctions u et v sont clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   Par intégration par parties on obtient :

   $$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\ &= -0+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \quad \text{qui est bien la formule attendue}\end{aligned}$$

   $$\boxed{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\,dt}$$

5. Soit $x\in\mathbb{R}$.

   Démontrons par récurrence la formule proposée (notée $\mathscr{P}(n)$) pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   I. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!}\,\mathrm{e}^t\,dt=\frac{1}{1}+\int_0^x \mathrm{e}^t\,dt = 1+[\mathrm{e}^t]_0^x = 1+\mathrm{e}^x-1=\mathrm{e}^x$ d'où $\mathscr{P}(0)$.

   H. Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ c'est-à-dire : $\displaystyle\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,dt$

   D'après la question précédente $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,dt=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\,dt$

   Par report, $\displaystyle\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\,dt$

Par raccrochage, $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\,dt$ d'où $\mathscr{P}(n+1)$

C. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}$

6. Soit $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
   La fonction exponentielle est croissante sur $[0,x]$ et $x \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,x],\ \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x$.
   Étant donné que $(x-t)^n \geqslant 0$, on a par produit $(x-t)^n\,\mathrm{e}^t \leqslant (x-t)^n\,\mathrm{e}^x$
   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,x],\ (x-t)^n\,\mathrm{e}^t \leqslant (x-t)^n\,\mathrm{e}^x}$

7. Soit $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 5, $\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

   donc $\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right|$

   Étant donné que $x \geqslant 0$ et que la fonction $t \mapsto \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t$ est positive sur $[0,x]$, on peut affirmer que $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. On a alors $\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
   D'après la question précédente et par croissance de l'intégrale, $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t$.
   $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{\mathrm{e}^x x^{n+1}}{n!(n+1)} = \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^x}{(n+1)!}$
   Par transitivité on obtient finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\quad \left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^x}{(n+1)!}}$

8. Si $x \in [0,1]$ alors la suite géométrique $(x^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie donc par quotient $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^x}{(n+1)!} = 0$.

   Si $x > 1$ alors par croissances comparées $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}\,\mathrm{e}^x}{(n+1)!} = 0$.

   D'après la question précédente et le théorème des gendarmes on a $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 0$ donc

   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x}$

9. Dans le cas particulier $x = 1$, on reconnait S_n dans la somme de la question précédente donc par unicité de la limite, $\boxed{\ell = \mathrm{e}}$

10. (a) La fonction f n'est pas définie en 0 et $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
    $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$
    Dorénavant f désignera le prolongement par continuité de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
    En particulier $\boxed{f(0) = 1}$
    (b) Soit $x > 0$.
    $x^2\left(T_0(x) - \frac{1}{2}\right) = x^2\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1}{x} - \frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1\right) - \frac{1}{2}x^2 = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} = \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}$.

Par quotient, on a bien $\boxed{T_0(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}}{x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*}$

(c) D'après la question précédente $\left|T_0(x) - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{\left|\mathrm{e}^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}\right|}{x^2}$

D'après la question 7 on a pour $n = 2$: $\left|\mathrm{e}^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \dfrac{x^3 \,\mathrm{e}^x}{3!}$

Sachant que $\dfrac{1}{x^2} > 0$, on a par produit : $\dfrac{1}{x^2}\left|\mathrm{e}^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \dfrac{x^3 \,\mathrm{e}^x}{x^2 3!}$

Après simplifications on obtient $\left|T_0(x) - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{x \,\mathrm{e}^x}{3!}$

Par produit, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{e}^x}{3!} = 0$ donc par le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{x\to 0} T_0(x) - \frac{1}{2} = 0$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} T_0(x) = \frac{1}{2}}$

(d) Par définition de la dérivabilité d'une fonction en un point, on déduit de la question précédente que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \dfrac{1}{2}.}$

Sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$, $\boxed{\text{la tangente à } \mathscr{C}_f \text{ en } 0 \text{ a pour équation } y = 1 + \tfrac{1}{2}x.}$

Exercice 2. *Suite définie implicitement et suite récurrente*

1. $x \in \mathscr{D}_g \iff 1 + x > \iff x > -1$ donc $\mathscr{D}_g =]-1, +\infty[$.
   g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ par composition et somme.
   Soit $x > -1$. $g'(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{1+x} > 0$ donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]-1, +\infty[.}$

2. (a) D'après la question précédente g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.
   Par composition et somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1} g(x) = -\infty$
   $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\dfrac{1}{n} \in]-\infty, +\infty[= \left]\displaystyle\lim_{x\to-1} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[$.
   D'après le théorème de la bijection,
   $\boxed{\text{l'équation } g(x) = \dfrac{1}{n} \text{ admet une unique solution dans }]-1, +\infty[\text{ que l'on notera } u_n.}$

   (b) $g(0) = 0$ et $g(1) = \mathrm{e} - 1 + \ln 2 > 2,7 - 1 + 0,6 = 2,3$ d'après les données numériques de l'énoncé.
   Sachant que $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1 < 2,3$, on peut écrire $g(0) < g(u_n) < g(1)$.
   Par stricte croissance de g sur $]-1, +\infty[$ on obtient $\boxed{0 < u_n < 1}$.

   (c) $g(u_n) = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = g(u_{n+1})$ donc $\boxed{g(u_n) > g(u_{n+1})}$.
   Par stricte croissance de g sur $]-1, +\infty[$ on obtient $u_n > u_{n+1}$. Comme cette inégalité est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$

   (d) D'après les deux dernières questions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.
   Par le théorème de la limite monotone $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$. On note $a = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
   La continuité de g donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(a)$. Par ailleurs il est clair que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Or on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = \frac{1}{n}$ donc par unicité de la limite $\boxed{g(a) = 0}$.

$0 \in]-\infty, +\infty[= \left] \lim_{x \to -1} g(x), \lim_{x \to +\infty} g(x) \right[$.

D'après le théorème de la bijection l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-1, +\infty[$.

$g(0) = 0$ donc 0 est une solution de l'équation $g(x) = 0$. Par unicité de la solution, $a = 0$.

On a montré que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Autre méthode (plus rapide)

D'après la question 2a g réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (théorème de la bijection).

$g(u_n) = \dfrac{1}{n}$ donc $u_n = g^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Sachant que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ on obtient $\lim_{n \to +\infty} u_n = g^{-1}(0)$ par continuité de g^{-1} (théorème de la bijection). On a $g(0) = 0$ donc $g^{-1}(0) = 0$ et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

(e) $\dfrac{g(u_n)}{u_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{u_n} - 1 + \ln(1 + u_n)}{u_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{u_n} - 1}{u_n} + \dfrac{\ln(1 + u_n)}{u_n}$

Sachant que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ on a $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et par quotient $\dfrac{\mathrm{e}^{u_n} - 1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{u_n} = 1$.

On a également $\ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et par quotient $\dfrac{\ln(1 + u_n)}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{u_n} = 1$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{u_n} - 1}{u_n} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + u_n)}{u_n} = 1$. Par somme $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \dfrac{g(u_n)}{u_n} = 2}$

On sait que $g(u_n) = \frac{1}{n}$ donc par report dans la limite précédente, $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{nu_n} = 2$.

Cette dernière limite étant finie non nulle, on peut écrire $\dfrac{1}{nu_n} \underset{+\infty}{\sim} 2$. On compose par la fonction inverse : $nu_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$ et on divise par n : $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}}$

3. (a) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{v_n > 0}_{\mathscr{P}(n)}$.

Initialisation. D'après l'énoncé $v_0 = 1$ d'où $\mathscr{P}(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\underbrace{v_n > 0}_{\text{H.R}}$.

g étant strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, on a $g(v_n) > g(0)$ ainsi $v_{n+1} > 0$ d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > 0}$

(b) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{v_{n+1} > v_n}_{\mathscr{P}(n)}$.

Initialisation. $v_0 = 1$ d'où $v_1 = g(1) = \mathrm{e} - 1 + \ln 2 > 2,7 - 1 + 0,6 = 2,3$ d'après les données numériques de l'énoncé. En particulier $v_1 > v_0$ d'où $\mathscr{P}(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\underbrace{v_{n+1} > v_n}_{\text{H.R}}$.

g étant strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, on a $g(v_{n+1}) > g(v_n)$ car d'après la question précédente v_n et v_{n+1} appartiennent à $]-1, +\infty[$.

ainsi $v_{n+2} > v_{n+1}$ d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} > v_n}$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$

(c) La fonction h est définie là où g est définie c'est-à-dire $]-1,+\infty[$.
$h'(x) = g'(x) - 1 = \mathrm{e}^x + \frac{1}{1+x} - 1 = \mathrm{e}^x - 1 + \frac{1}{1+x}$.
Si $x \geqslant 0$ alors $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 = 1$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, ainsi $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - 1 + \frac{1}{1+x} > 0$ sachant que $\frac{1}{1+x} > 0$.

On en déduit que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs $h(0) = 0$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h(x) > 0}$.

En particulier h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $g(x) = x \iff g(x) - x = 0 \iff h(x) = 0$ donc $\boxed{g \text{ n'a pas de point fixe sur } \mathbb{R}_+^*.}$

(d) Supposons par l'absurde que (v_n) ne tende pas vers $+\infty$. Sachant que (v_n) est croissante (question 3b), elle va converger vers une limite que l'on notera ℓ supérieure ou égal au premier terme de la suite c'est-à-dire $v_0 = 1$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ et par continuité de g, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_n) = g(\ell)$. Or $v_{n+1} = g(v_n)$ donc par unicité de la limite, $\ell = g(\ell)$. Autrement dit, ℓ est un point fixe de g supérieur ou égal à 1, ce qui est impossible d'après la question précédente.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$

4.

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln(1+x)\ \mathrm{d}x = [\,\mathrm{e}^x]_0^1 - [x]_0^1 + \int_0^1 u'(x)\ln(u(x))\ \mathrm{d}x$$

avec $u(x) = 1 + x$ et $u'(x) = 1$

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 - (1-0) + [(1+x)\ln(1+x) - (1+x)]_0^1 = \mathrm{e} - 1 - 1 + 2\ln(2) - 2 - (\ln(1) - 1)$$

$$\boxed{\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} + 2\ln(2) - 3}$$

Exercice 3. *Suite récurrente, une autre approche*

1. $\varphi(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x \iff \begin{cases} 1 + x = x^2 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

   $1 + x = x^2 \iff x^2 - x - 1 = 0$.
   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$ donc les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Seule x_2 est positive donc $\boxed{\text{l'unique solution de l'équation } \varphi(x) = x \text{ est } b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.}$

   Autrement dit, $\boxed{\text{l'unique point fixe de } \varphi \text{ est } b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, le nombre $\sqrt{1+x}$ est bien défini et est positif donc $\varphi(x) \in \mathbb{R}_+$.
   On a démontré que $\boxed{\varphi(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+}$
   Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \in \mathbb{R}_+$
   I. $w_0 = 0$ donc $w_0 \in \mathbb{R}_+$.
   H. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $w_n \in \mathbb{R}_+$.
   On a $w_{n+1} = \varphi(w_n) \in \varphi(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ donc $w_{n+1} \in \mathbb{R}_+$.
   C. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \in \mathbb{R}_+}$

3. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

Première méthode : expression conjuguée

$\varphi(x)-\varphi(y)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1+y}=\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+y})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}=\dfrac{(\cancel{1}+x)-(\cancel{1}+y)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}$

$\qquad=\dfrac{x-y}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}$

Sachant que $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}>0$ on a $|\varphi(x)-\varphi(y)|=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}$

On sait que $x\geqslant 0$ donc $1+x\geqslant 1$ et $\sqrt{1+x}\geqslant\sqrt{1}=1$. On obtient également $\sqrt{1+y}\geqslant 1$.
Par somme $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}\geqslant 2$.

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}\leqslant\dfrac{1}{2}$

Par produit $\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}}\leqslant\dfrac{|x-y|}{2}$

On a montré que $\boxed{\forall(x,y)\in\ (\mathbb{R}_+)^2,\ |\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\dfrac{|x-y|}{2}}$

Deuxième méthode : théorème des accroissements finis

Pour simplifier on suppose que $y<x$. La fonction φ est continue sur $[y,x]$ et dérivable sur $]y,x[$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]y,x[$ tel que $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}=\varphi'(c)$

Pour $t\in]x,y[$, on a $t>0$ car $x\geqslant 0$. On a successivement :

$1+t>1$, $\sqrt{1+t}>\sqrt{1}=1$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}<\dfrac{1}{1}=1$, $\varphi'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}<\dfrac{1}{2}$

On compose par la valeur absolue : $\left|\dfrac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right|=|\varphi'(c)|=\varphi'(c)<\dfrac{1}{2}$

On multiplie par $|x-y|>0$: $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\dfrac{|x-y|}{2}$

On a montré que $\boxed{\forall(x,y)\in\ (\mathbb{R}_+)^2,\ |\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\dfrac{|x-y|}{2}}$

4. Soit $n\in\mathbb{N}$.

   $|w_{n+1}-b|=|\varphi(w_n)-\varphi(b)|$ car b est un point fixe de φ

   $\qquad\leqslant\dfrac{[w_n-b|}{2}$ d'après la question précédente, sachant que w_n et b sont positifs

   $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ |w_{n+1}-b|\leqslant\dfrac{1}{2}|w_n-b|}$

5. Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \underbrace{|w_n-b|\leqslant 2\times\dfrac{1}{2^n}}_{\mathscr{P}(n)}$

   I. $|w_0-b|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ car $w_0=0$. Par ailleurs $2\times\dfrac{1}{2^0}=2$.

   On sait que $4<5<9$ donc $2<\sqrt{5}<3$

   Par conséquent $3<1+\sqrt{5}<4$ et $\dfrac{3}{2}<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<2$ d'où $\mathscr{P}(0)$.

   H. Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $|w_n-b|\leqslant 2\times\dfrac{1}{2^n}$.

   Par produit $\dfrac{1}{2}|w_n-b|\leqslant 2\times\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{1}{2}=2\times\dfrac{1}{2^{n+1}}$

Avec la question précédente on obtient $|w_{n+1} - b| \leqslant 2 \times \dfrac{1}{2^{n+1}}$ d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

C. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |w_n - b| \leqslant 2 \times \dfrac{1}{2^n}}$

6. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 \times \dfrac{1}{2^n} = 0$.
   D'après la question précédente on a par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n - b = 0$

   donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

7. $\varphi(x) = u'(x)(u(x))^{\frac{1}{2}}$ qui se primitive en $\frac{(u(x))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(u(x))^{\frac{3}{2}}$ avec $u(x) = 1 + x$ et $u'(x) = 1$.
   $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right)$. Sachant que $x^{\frac{3}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = xx^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$, on a finalement :
   $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)}$

Exercice 4. *Valeur moyenne d'une fonction et méthode des rectangles*

```
import math as m
def moyenne(n):
    s=0
    for k in range(n):
        s += m.exp(-(k*2/n)**2/2)
    return s/n
```