Questions de cours

1. Écrire la commande d'importation du module *numpy* et la commande qui permet de calculer le rang de la famille de vecteurs $\Big((1,2,3),(-2,5,0),(2,1,4)\Big)$ en utilisant la fonction `np.linalg.matrix_rank`.
2. Traiter (au choix du colleur) l'une des quatre questions suivantes :
   (a) Définir une application linéaire et un endomorphisme. (1.1)
   (b) Définir le noyau et l'image d'une application linéaire. (2.1)
   (c) Montrer que le noyau d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est un SEV de $\mathbb{K}^p$. (2.2)
   (d) Montrer que l'image d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est un SEV de $\mathbb{K}^n$. (2.2)
3. Traiter (au choix du colleur) l'une des sept questions suivantes :
   (a) Définir une famille génératrice de E.
   (b) Définir une droite vectorielle et un plan vectoriel.
   (c) Définir une famille libre et donner un critère de liberté lorsque la famille contient un ou deux vecteurs.
   (d) Définir une base et la dimension d'un SEV E de $\mathbb{K}^n$.
   (e) Comment caractériser une base à l'aide de la dimension, de la liberté et de la "généricité"? (thm 3.8)
   (f) Définir le rang d'une famille de vecteurs. Quel est le lien entre le rang d'une famille de vecteurs et le rang d'une matrice (prop 3.16)?
   (g) Énoncer les propriétés du rang (thm 3.15).
4. Traiter (au choix du colleur) l'une des sept questions suivantes :
   (a) Définir un SEV de $\mathbb{K}^n$.
   (b) Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Définir le SEV $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
   (c) Définir les coordonnées de $v \in E$ dans une base $(u_1, \dots, u_p)$ de E.
   (d) Définir la matrice de la famille $(v_1, \dots, v_q)$ de E dans une base $(u_1, \dots, u_p)$ de E.
   (e) Définir la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et préciser les coordonnées dans cette base.
   (f) Énoncer les propriétés principales d'une famille libre (prop 3.4).
   (g) Énoncer les propriétés principales d'une famille génératrice de E. (prop 3.2)

Programme

- Python
  — Calcul de seuil permettant de mesurer la vitesse de convergence ou divergence.
  — Savoir calculer un terme d'une suite récurrente ($u_{n+1} = f(u_n)$).
  — Représentation graphique de tan et arctan avec `plt.plot(x,np.tan(x))` `plt.plot(np.tan(x),x)`.
  — Dérivation numérique : approximation de $f'(x)$ par $\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$ pour une petite valeur de t (si l'expression de f est inconnue ou compliquée).
  — Détermination pratique du rang d'une matrice représentée par un tableau *numpy* avec la fonction `np.linalg.matrix_rank`.

- Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$
  — Définition d'un SEV de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Combinaisons linéaires. Intersection de deux SEV.
  — Exemples de SEV de $\mathbb{K}^n$: $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $\mathbb{K}^n$, droites et plans vectoriels.
  — SEV engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice d'un SEV.
  — Caractérisation d'un SEV de $\mathbb{K}^n$ par une famille génératrice, une représentation paramétrique, un système d'équations linéaires homogènes (abusivement appelées équations cartésiennes). Savoir passer d'une de ces caractérisations aux deux autres.
  — Familles libres et familles liées.
  — Base et dimension d'un SEV. Base canonique de $\mathbb{K}^n$.
  — Liens entre le nombre de vecteurs d'une famille de E et $\dim(E)$ dans les deux cas : 1) la famille est libre, 2) la famille est génératrice de E.
  — Si le nombre de vecteurs de $\mathscr{F}$ est égal à la dimension de E et que $\mathscr{F}$ est libre **ou** génératrice de E alors $\mathscr{F}$ est une base de E.
  — Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
  — Rang d'une famille finie de vecteurs. Lien entre le rang, le nombre de vecteurs, le caractère libre et le caractère générateur de E d'une famille.
  — Détermination pratique du rang d'une famille de vecteurs d'un SEV E : par extraction de vecteur(s) CL des autres ou par échelonnement de la matrice de cette famille dans une base de E. Opérations sur les colonnes autorisées.

- Applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$: uniquement linéarité, noyau, image
  — Ensembles $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$. Combinaisons linéaires de deux applications linéaires, composition d'applications linéaires, réciproque d'un endomorphisme bijectif, puissances d'endomorphisme.
  — Noyau et image d'une application linéaire. Détermination pratique du noyau et de l'image.