Mathématiques

Lycée THIERS
Année 24-25

Devoir surveillé n° 9

1BCPST 2

16 juin 2025
Durée : 1h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice. *Espaces vectoriels*

On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère les sous-ensembles V et W de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$V = \{(\lambda+\mu, 2\lambda+2\mu, -2\lambda+\gamma, \lambda+3\mu+\gamma)\ ;\ (\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ ;\ x-y-z+t=0\ ,\ 2y+z-t=0\ ,\ 3x+y-z+t=0\right\}$$

1. Justifier que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. On pose $v_1 = (1,2,-2,1)$ et $v_2 = (0,0,1,1)$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de V.
3. Soit $w_3 = (1,-1,2,0)$ et $w_4 = (-1,1,0,2)$. Montrer que (w_3, w_4) est une base de W.
4. Déterminer le rang de la famille (v_1, v_2, w_3, w_4). Est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
5. Montrer que la famille (v_1, v_2, w_3) est une base de $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, w_3, w_4)$.
6. Démontrer que F a pour équation cartésienne $x-5y-3z+3t=0$.
7. On considère les vecteurs $f_1 = (2,1,-1,0)$; $f_2 = (3,0,0,-1)$ et $f_3 = (2,1,0,1)$.
   Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de F.
8. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
9. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
   Déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
   En déduire la matrice des coordonnées de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.
10. Montrer que pour chaque $u \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique couple $(f,\tau) \in F \times \mathbb{R}$ tel que $u = f + \tau e_4$.