Mathématiques

Devoir surveillé n° 9

Lycée THIERS
Année 24-25

1BCPST 2

16 juin 2025
Durée : 1h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice. *Espaces vectoriels*

1. On constate que $\boxed{V \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ car :

$$V = \{\lambda(1,2,-2,1) + \mu(1,2,0,3) + \nu(0,0,1,1)\ ;\ (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1,2,-2,1),(1,2,0,3),(0,0,1,1))$$

De même, on a, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{cases} x-y-z+t=0 \\ 2y+z-t=0 \\ 3x+y-z+t=0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\iff} \begin{cases} x-y-z+t=0 \\ 2y+z-t=0 \\ 4y+2z-2t=0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \begin{cases} x-y-z+t=0 \\ 2y+z-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y \\ t=2y+z \end{cases}$$

ce qui permet d'affirmer que $\boxed{W \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ car :

$$W = \{(-y,y,z,2y+z)\ ;\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((-1,1,0,2),(0,0,1,1))$$

.

2. On constate que $(1,2,0,3) = v_1 + 2v_2$ donc $V = \text{Vect}(v_1,v_2)$ et la famille (v_1,v_2) est génératrice de V. C'est une famille libre (v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires) donc $\boxed{(v_1,v_2) \text{ est une base de } V}$.
3. Commençons par déterminer la dimension de W. D'après la première question la famille (w_4,v_2) est une famille génératrice de W, et cette famille est libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires) : c'est donc une base de W et on en déduit que W est de dimension 2.
On constate ensuite que $w_3 \in W$ (les coordonnées vérifient les trois équations) et que (w_3,w_4) est aussi une famille libre (w_3 et w_4 ne sont pas colinéaires) : (w_3,w_4) fournit donc une famille libre de $2 = \dim(W)$ vecteurs de W ce qui nous permet d'affirmer que $\boxed{(w_3,w_4) \text{ est une base de } W}$.
4. Faisons un calcul de rang matriciel :

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow 3L_4 - 5L_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{3}$$

Cette famille n'est donc $\boxed{\text{pas libre}}$ car son rang est strictement inférieur à son nombre d'éléments.
Elle n'est $\boxed{\text{pas génératrice de } \mathbb{R}^4}$ car son rang est strictement inférieur à $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$.
5. Par définition du rang d'une famille de vecteurs on a $\dim(F) = \text{rg}(v_1,v_2,w_3,w_4) = 3$. La famille (v_1,v_2,w_3) est formée de vecteurs de F, est encore génératrice de F (car $w_4 = 2v_2 - w_3$) et possède $3 = \dim(F)$ éléments donc $\boxed{(v_1,v_2,w_3) \text{ est une base de } F}$.

6. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Comme (v_1,v_2,w_3) est une base de F, on peut dire que : $(x,y,z,t) \in F$ si et seulement si la famille $(v_1,v_2,w_3,(x,y,z,t))$ est liée (c'est à dire de rang strictement inférieur à 4). Les mêmes opérations élémentaires sur les lignes que celles faites précédemment donnent :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & -1 & y \\ -2 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 0 & t \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 4 & (z+2x) \\ 0 & 0 & -3 & (y-2x) \\ 0 & 0 & 0 & (x-5y-3z+3t) \end{pmatrix}$$

Finalement la famille est liée si et seulement si $\boxed{x-5y-3z+3t=0}$ ce qui donne une équation de F.

7. On constate que les coordonnées de f_1, f_2 et f_3 vérifient l'équation de F donc ces vecteurs sont bien des éléments de F. La famille (f_1,f_2,f_3) possède $3 = \dim(F)$ éléments et il suffit donc de démontrer que cette famille est libre.
Si $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On peut donc dire que $\boxed{(f_1,f_2,f_3) \text{ est une base de } F}$.

8. La famille $\mathcal{B}$ possède $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ éléments et il suffit donc de montrer qu'elle est libre. On sait que (f_1,f_2,f_3) est libre et on constate que les coordonnées de e_4 ne vérifient pas l'équation de F donc $e_4 \notin \mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3)$: ceci montre que $\mathcal{B}$ est une famille libre, et par conséquent $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$.

9. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$u = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 e_4 \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_1 + \lambda_3 = y \\ -\lambda_1 = z \\ -\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = t \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -z \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \\ \lambda_3 = y + z \\ \lambda_4 = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y - z + t \end{cases}$$

En appliquant ces formules à $u = e_1, u = e_2, u = e_{\leq}3$ puis $u = e_4$ on trouve finalement :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

10. La famille $\mathcal{B}$ étant une base de $\mathbb{R}^4$ il existe un unique quadruplet $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$u = \underbrace{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3}_{f} + \underbrace{\lambda_4}_{\tau} e_4 = \boxed{f + \tau e_4}$$

avec $f \in \mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3) = F$ et $\tau = \lambda_4 \in \mathbb{R}$ qui sont bien uniques.