Exercice 1 (DL par opérations, composition, primitivation et T-Y)

1. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f : x \mapsto \sqrt{1-2x}$. En déduire $f'(0)$ et $f''(0)$.
2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.
3. $\mathrm{DL}_2(2)$ de $x \mapsto \sqrt{x}$. On utilisera deux méthodes.
4. $\mathrm{DL}_2(2)$ de $x \mapsto \ln(x)$. On utilisera deux méthodes.
5. $\mathrm{DL}_2(\frac{\pi}{4})$ de $f : x \mapsto \frac{\cos x - \sqrt{2}/2}{\pi - 4x}$. En déduire la dérivée en $\frac{\pi}{4}$ du prolongement par continuité de f. Interprétation géométrique.
6. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+x}$. Interprétation géométrique.
7. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto e^x \sin x$.
8. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \Big(\ln(1+x)\Big)^2$.
9. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$. En déduire la dérivée en 0 du prolongement par continuité de f. Interprétation géométrique.
10. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$. On utilisera deux méthodes.
11. $\mathrm{DL}_4(0)$ de arctan.
12. $\mathrm{DL}_2(+\infty)$ de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+2x}}$.

Exercice 2 (Application des DL à la recherche d'équivalent)

Déterminer un équivalent de la suite (u_n) définie par : $u_n = \cos\big(\frac{1}{n}\big) - 1 + \frac{1}{2n}\sin\big(\frac{1}{n}\big)$.
Indication : On cherchera le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $x \mapsto \cos x - 1 + \frac{1}{2}x\sin x$.

Exercice 3 (Application des DL au calcul de limite)

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$ en utilisant un développement limité.

Exercice 4 (Application des DL à l'étude de f au voisinage de $x_0 \neq 0$)

Soit $f(x) = \ln(x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(1)$ de f. Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 et préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.

Exercice 5 (Application des DL à l'étude de f au voisinage de 0)

Soit f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \begin{cases} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$ avec λ réel.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer le développement limité de $x \mapsto (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2 en 0.
3. En déduire la valeur λ_0 qu'il faut donner à λ afin que f soit continue en 0.
   Dorénavant on supposera que $\lambda = \lambda_0$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.

Exercice 6 (Application de la formule de Taylor-Young)

Soit I un intervalle contenant x et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Dans cette question on suppose que f est de classe C^2.
   Démontrer que l'erreur commise en approchant $f'(x)$ par $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est équivalente à $\frac{h}{2}f''(x)$ lorsque h tend vers 0.
2. Dans cette question on suppose que f est de classe C^3.
   (a) Démontrer que l'erreur commise en approchant $f'(x)$ par $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ est équivalente à $\frac{h^2}{6}f'''(x)$ lorsque h tend vers 0.
   (b) On suppose que h est "petit". Déterminer, parmi les deux approximations de $f'(x)$ précédentes, celle qui est la meilleure.

Remarque. La première approximation est utilisée dans la méthode d'Euler (solution approchée d'une équation différentielle). Cet algorithme se retrouve à l'oral d'Agro.

Exercice 7 (Étude de fonction avec des DL)

Étudier la fonctions $f : x \longmapsto x\, e^{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$
On déterminera les variations et les limites aux bornes de l'ensemble de définition. On cherchera également le point où la fonction se prolonge par continuité à gauche ou à droite et on étudiera la dérivabilité à gauche et à droite de f en ce point. On donnera une équation de la demi-tangente en -1 et de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à ces tangentes.
On représentera f séparément sur $]-1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1[$ à la main puis avec python et les modules *numpy* et *matplotlib.pyplot*.

Exercice 8 (Étude de fonction avec des DL bis)

Étudier la fonction $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$. En particulier :

1. Déterminer les variations et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Chercher les points où la fonction se prolonge par continuité et étudier la dérivabilité de la fonction en ces points.
3. Représenter f sur son domaine de définition à la main et avec Python.