

1. Nombres complexes, conjugaison et module

1.1 Définition

Théorème et Définition 1 : Rappel.

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = x + iy$ avec x et y réels.

L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est appelée **la forme algébrique** du nombre complexe z , x est **la partie réelle** de z , notée $\text{Re}(z)$, y est **la partie imaginaire** de z et notée $\text{Im}(z)$. L'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est nulle, est appelé **ensemble des imaginaires purs** et noté $i\mathbb{R}$.

Définition 1 : Opérations sur les nombres complexes.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes (avec a, a', b et b' des nombres réels). Alors on pose

- $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + a' + i(b + b')$
- $z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Proposition 1 : Propriétés algébriques des nombres complexes.

Soit $(z, z', \bar{z}, \lambda) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$.

1. $z + 0 = 0 + z = z$ (**Élément neutre pour l'addition**)
2. $z + z' = z' + z$ (**Commutativité de l'addition**)
3. $(z + z') + \bar{z} = z + (z' + \bar{z}) = z + z' + \bar{z}$ (**Associativité de l'addition**)
4. $z \times 1 = 1 \times z = z$ (**Élément neutre pour la multiplication**)
5. $z \times z' = z' \times z$ (**Commutativité de la multiplication**)
6. $z \times z' \times \bar{z} = z \times (z' \times \bar{z})$ (**Associativité de la multiplication**)
7. $\exists! w \in \mathbb{C} \mid z + w = 0$ (**Opposé unique**, noté $-z$)
8. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists! w \in \mathbb{C} \mid zw = 1$, noté $w = \frac{1}{z}$ (**Inverse unique**)

9. $z \times (z' + \bar{z}) = zz' + z\bar{z}$ (**Distributivité de $\times$ par rapport à $+$**)
10. $zz' = 0 \iff z = 0$ ou $z' = 0$ (**Intégrité de $\mathbb{C}$**)
11. $\operatorname{Re}(\lambda z + z') = \lambda \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ (**Linéarité de la partie réelle**)
12. $\operatorname{Im}(\lambda z + z') = \lambda \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$ (**Linéarité de la partie imaginaire**)

⚠ Attention

La partie réelle/imaginaire du produit n'est pas ce que vous croyez.
En général,

$$\operatorname{Re}(zz') \neq \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(zz') \neq \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z').$$

Exemple : Considérez $z = z' = i$. Alors $zz' = i^2 = -1$, donc :

$$\operatorname{Re}(zz') = -1 \quad \text{mais} \quad \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') = 0 \times 0 = 0.$$

Exemple 1 .

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $(1 + 3i)(1 - i)$.
2. $(3 + i)^2$.

Corollaire 1 .

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

- $z = z' \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$.
- $z = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(z) = 0$.

⚠ Attention

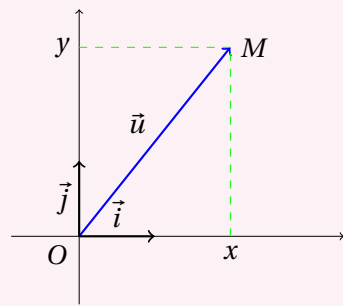
On ne compare pas les complexes, seulement les réels.
Il n'y a pas de $\leq, <, \geq$ ou $>$ définis sur $\mathbb{C}$.

1.2 Affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur

Définition 2 .

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) . On appelle **affixe du point M** le nombre complexe $x + iy$, et inversement M est appelé **l'image** du nombre complexe $x + iy$.
- Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y) . On appelle **affixe du vecteur $\vec{u}$** le nombre complexe $x + iy$.



Remarque 1 .

- L'axe des abscisses $(O, \vec{i})$ est appelé **axe réel**.
- L'axe des ordonnées $(O, \vec{j})$ est appelé **axe imaginaire**.

Proposition 2 : Propriétés de l'afixe.

- (a) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectifs $u, v \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.
- (b) Soient A et B deux points du plan d'affixes respectifs $a, b \in \mathbb{C}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $(b - a)$.

Démonstration

Exemple 2 .

Représenter dans le plan complexe les points d'affixe : 1, -1, i, -i.

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 .

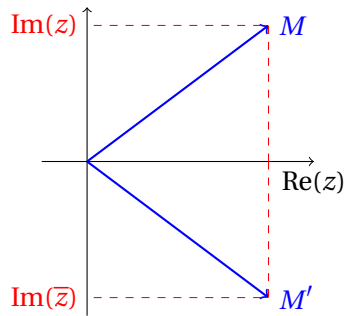
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $z = x + iy$. On appelle **conjugué** de z , le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = x - iy$.

On a par conséquent

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z).$$

Interprétation géométrique du conjugué

Le point M' d'affixe $\bar{z}$ est l'image du point M d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Proposition 3.

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

• Propriétés des parties réelle et imaginaire :

- ❶ $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- ❷ $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$.
- ❸ z est imaginaire pur $\iff \bar{z} = -z$.

• Propriétés de la conjugaison :

- ❹ $\bar{\bar{z}} = z$.
- ❺ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
- ❻ $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.
- ❼ $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$.

Démonstration

Exemple 3.

Donner la forme algébrique de $\frac{1}{1-i}$

1.4 Module d'un nombre complexe

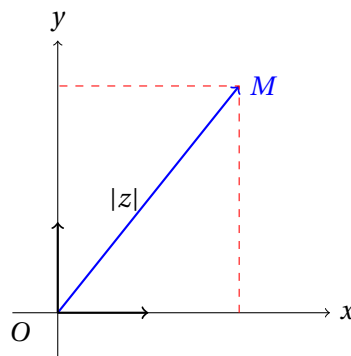
Définition 4.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un nombre complexe sous forme algébrique. On appelle **module** de z le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Interprétation géométrique du module

- Si M est le point du plan d'affixe z , alors $OM = |z|$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur d'affixe z , alors $|z| = \|\vec{u}\|$.



Théorème 1 (Propriétés du module).

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- | | | | |
|--------------------------|------------------------|--|--|
| ❶ $ z = 0 \iff z = 0$. | ❷ $ z ^2 = z\bar{z}$. | ❸ $ -z = z $ et $ \bar{z} = z $. | ❹ $ \operatorname{Re}(z) \leq z $ et $ \operatorname{Im}(z) \leq z $. |
| | | ❺ $ zz' = z z' $ et $ z^n = z ^n$. | |
| | | ❻ Si $z \neq 0$, $\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$ et $\left \frac{z'}{z}\right = \frac{ z' }{ z }$. | |

Démonstration

Exemple 4 .

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on pose $Z = \frac{1+iz}{1-iz}$.

1. Pour quels complexes z le complexe Z est-il un réel?
2. Pour quels complexes z le complexe Z est-il un imaginaire pur?

Exemple 5 .

Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\operatorname{Re} z = |z|$ si, et seulement si, $z \in \mathbb{R}_+$.

Proposition 4 (Inégalités triangulaires).

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- (i) **Première inégalité triangulaire :** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
De plus, $|z + z'| = |z| + |z'|$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$.
- (ii) **Deuxième inégalité triangulaire :** $||z| - |z'||| \leq |z - z'|$.

Démonstration**Corollaire 2 (Cercles et disques en complexe).**

Soient A un point d'affixe a et $r \in \mathbb{R}_+$.

- (i) L'ensemble des points d'affixes z vérifiant $|z - a| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r .
- (ii) L'ensemble des points d'affixes z vérifiant $|z - a| \leq r$ est le disque fermé (circonférence incluse) de centre A et de rayon r .
- (iii) L'ensemble des points d'affixes z vérifiant $|z - a| < r$ est le disque ouvert (circonférence exclue) de centre A et de rayon r .

Exemple 6 .

Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. $|z + 2i| = 2i$
2. $|z + 2i| = 2$
3. $|(1 + i)z - 2i| = 2$.
4. $|z + 1 - 5i| < 2$

2. Forme trigonométrique

2.1 Nombres complexes de module 1

Définition 5 .

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Autrement dit : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Remarque 2 .

Géométriquement, les images des complexes de $\mathbb{U}$ sont sur le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon 1, et les affixes des points du cercle trigonométrique sont les éléments de $\mathbb{U}$.

Exercice 1 .

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que : $z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$.

   **Solution :**

Exercice 2 .

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur si et seulement si $z \in \mathbb{U}$.

   **Solution :**

2.2 Exponentielle imaginaire

Définition 6 .

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. On l'appelle *l'exponentielle imaginaire de θ* .

Exemple 7 .

1. $e^{i\pi} = -1$.
2. $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Proposition 5 .

Pour tout nombre complexe z : $z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$.
Il en résulte que :

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}\}$$

Théorème 2 .

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- (i) **Transformation des sommes en produits :** $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$
- (ii) **Conjugaison :** $\overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- (iii) $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' \pmod{2\pi}$
- (iv) **Formules d'Euler :** $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- (v) **Formule de Moivre :**
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ ou encore $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

La formule « $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$ » permet de retrouver les formules trigonométriques.

À retenir

Pour tous réels x et y :

$$\blacktriangleright \cos(x+y) = \operatorname{Re}\left(e^{i(x+y)}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ix} e^{iy}\right) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y).$$

$$\blacktriangleright \sin(x+y) = \operatorname{Im}\left(e^{i(x+y)}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{ix} e^{iy}\right) = \cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y).$$

$\blacktriangleright$ On en déduit :

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x),$
- $\sin(2x) = \sin(x) \cos(x) + \sin(x) \cos(x) = 2\sin(x) \cos(x).$

En posant $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$ on obtient :

$$\blacktriangleright \cos(x) + \cos(y) = \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a) \cos(b), \text{ donc}$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

$$\blacktriangleright \sin(x) + \sin(y) = \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a) \cos(b), \text{ donc}$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Technique de l'angle moitié

Il s'agit de factoriser une somme ou une différence de deux complexes de module 1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

En particulier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

2.3 Argument d'un complexe non nul

Proposition et Définition 1.

Tout nombre complexe z **non nul** peut s'écrire sous la forme suivante, appelée **forme trigonométrique** :

$$z = |z| e^{i\theta} = |z| (\cos\theta + i \sin\theta), \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Le réel θ est appelé **argument** de z . Un tel nombre n'est pas unique : si θ est un argument de z , l'ensemble de tous les arguments de z est donné par $\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On notera $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$. Enfin, il existe un unique argument de z appartenant à l'intervalle $] -\pi, \pi]$. On l'appellera l'*argument principal* de z .

Démonstration

Exemple 8 .

- $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ car
- $\arg(-1) \equiv \pi [2\pi]$ car
- $\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ car

Exemple 9 .

Déterminer un argument de $z = 1 + i$.

   **Solution**

Exemple 10 .

Déterminer un argument de $z = 1 + i\sqrt{3}$.

   **Solution**

Remarque 3 .

Si $z = r e^{i\theta}$ avec $r, \theta \in \mathbb{R}$, alors c'est la forme trigonométrique lorsque $r > 0$. Mais, lorsque $r < 0$, alors la forme trigonométrique de z est $z = -r e^{i(\theta+\pi)}$, car $e^{i\pi} = -1$.

Proposition 6 .

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$.

- | | |
|---|---|
| (i) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$. | (iv) Si $z \neq 0$, $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z) [2\pi]$. |
| (ii) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$. | |
| (iii) Si $z \neq 0$, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$. | (v) $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$. |

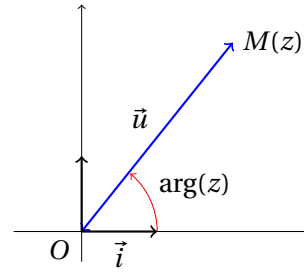
Démonstration**Exemple 11 .**

Déterminer un argument de $\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$.

   **Solution**

Interprétation géométrique l'argument

- Si z est un nombre complexe non nul d'image le point M , alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul d'affixe z , alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{u})$.



Amplitude et phase

Soient a, b deux réels non tous deux nuls et soit $x \in \mathbb{R}$.

En posant $z = a + ib = |z|e^{i\theta}$ on obtient :

$$a \cos(x) + b \sin(x) =$$

3. Équations algébriques, racines de l'unité

3.1 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 7 .

- Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine $n^{\text{ème}}$ de a** tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.
- Les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 sont généralement appelées les **racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité**. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

Exemple 12 .

Déterminer les racines $2^{\text{èmes}}$ et $4^{\text{èmes}}$ de l'unité.

   **Solution**

Théorème 3 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (i) Il existe exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité qui sont les complexes :

$$e^{i \frac{2k\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

- (ii) En général, si $z \in \mathbb{C}$ **non nul**, donné sous forme trigonométrique $z = r e^{i\theta}$, alors z possède exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ qui sont :

$$\sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{avec} \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Démonstration

Exemple 13 .

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Déterminer les racines cubiques (ou troisième) de l'unité.

   **Solution**

Exemple 14 .

Déterminer les racines cubiques de $z = 1 + i$.

   **Solution**

Exemple 15 .

Pour tout $n \geq 2$: $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$ et $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n-1}$.

   **Solution**

Racines carrées

Soit $z = a + ib = r e^{i\theta}$. On veut trouver les racines carrées de z , ce qui revient à résoudre l'équation $u^2 = z$ d'inconnue $u = x + iy \in \mathbb{C}$.

Méthode trigonométrique

Méthode algébrique

Exemple 16 .

Déterminer les racines carrées de $z = 8 - 6i$.

  **Solution**

3.2 Équations du second degré

Théorème 4 .

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes qui sont

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

avec δ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$ (**discriminant**) c'est-à-dire $\delta^2 = \Delta$.

De plus, lorsque les coefficients a, b, c sont réels et que le discriminant Δ est strictement négatif, ces deux solutions sont complexes non réelles et **conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration

Exemple 17 .

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.

   **Solution**

Corollaire 3 .

- Si z_1 et z_2 sont racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors on a les relations :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

- De plus on a la factorisation :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

3.3 Factorisation d'un polynôme

Proposition 7 .

Soient P une fonction polynomiale à coefficients complexes et $a \in \mathbb{C}$. Si a est une racine de P , alors P se factorise par $z - a$, c-à-d il existe une fonction polynomiale Q tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z - a)Q(z) \quad \text{avec} \quad \deg(Q) = \deg(P) - 1.$$

Exemple 18 .

Soit P la fonction polynomiale défini dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^3 - z^2 + i - 1.$$

Justifier que P se factorise sous la forme $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z - i)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 2 à coefficients complexes à déterminer.

   **Solution**

4. Exponentielle complexe

Définition 8 .

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle de z par :

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Remarque 4 .

- $\exp(0) = 1$.
- $\operatorname{Re}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \cos(\operatorname{Im}(z))$ et $\operatorname{Im}(e^z) = e^{\operatorname{Re}(z)} \sin(\operatorname{Im}(z))$.
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z)[2\pi]$.

Théorème 5 .

- (i) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$.
- (ii) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.
- (iii) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \exp(z') \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z - z' = 2k\pi i.$$

Démonstration

Exercice 3 .

Résoudre l'équation $\exp(z) = 1 + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   **Solution**

5. Interprétation géométrique des nombres complexes

5.1 Angles et rapports de distance

Proposition 8.

Soient $a, b, z \in \mathbb{C}$ tels que $z \neq a$ et $z \neq b$. On note A l'image de a , B celle de b et M celle de z .

$$\left| \frac{b-z}{a-z} \right| = \frac{MB}{MA} \quad \text{et} \quad \arg \left(\frac{b-z}{a-z} \right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi].$$

Démonstration

Corollaire 4.

- (i) A, B et M sont alignés $\iff \frac{b-z}{a-z} \in \mathbb{R}$.
- (ii) (AM) et (BM) sont orthogonales $\iff \frac{b-z}{a-z} \in i\mathbb{R}$.
- (iii) Soit $(z_i)_{1 \leq i \leq 4}$ quatre points distincts de $\mathbb{C}$. Ces quatre points sont cocycliques ou alignés si et seulement si $\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} \in \mathbb{R}$,

Démonstration

5.2 Transformations usuelles

Proposition 9.

Soient M un point d'affixe z . Soient en outre $\vec{u}$ un vecteur d'affixe u , Ω un point d'affixe ω et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

- (i) L'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ a pour affixe le nombre complexe $z + u$.
- (ii) L'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport λ a pour affixe le nombre complexe $\omega + \lambda(z - \omega)$.

(iii) L'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ a pour affixe le nombre complexe $\omega + e^{i\theta}(z - \omega)$.

Démonstration

5.3 Similitudes directes

Définition 9.

Une **similitude directe** est une transformation du plan admettant comme représentation dans le plan complexe l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b \end{array} \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}.$$

Exemple 19.

Théorème 6.

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude du plan.

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b .
- Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe Ω ($f(\Omega) = \Omega$) appelé **centre de la similitude**. De plus, dans ce cas, si
 - ▶ α est un argument de a ,
 - ▶ r est la rotation de centre Ω et d'angle α ,
 - ▶ h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$,
 alors f s'écrit comme la composée de h et r : $f = r \circ h = h \circ r$.