LYCÉE MOHAMMED VI D'EXCELLENCE DE BENGUERIR -CPGE-

Vendredi 26 Septembre 2025

Durée : 2 heures

Filière : TSI1

Devoir Surveillé N°1

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Les documents, la calculatrice et le blanco ne sont pas autorisés

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, veuillez encadrer le résultat final de chaque question, lorsque cela est possible.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
L'échange du matériel ou la communication entre candidats sont **interdits**

Tournez la page S.V.P.

Exercice 0- Une équation trigonométrique

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $4\sin(x)\cos(x) = 1$.

Exercice 1- Géométrie et complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2. Soient K, L et M les points d'affixes respectives $z_K = 1 + i$, $z_L = 1 - i$ et $z_M = -i\sqrt{3}$. Placer ces points dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.

3. (a) On note N le symétrique du point M par rapport au point L. Vérifier que son affixe z_N est égale à $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

(b) La rotation de centre O (origine du repère) et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme le point M en A et le point N en C. Déterminer les affixes z_A et z_C des points A et C.

(c) La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $2i$ transforme le point M en D et le point N en B. Déterminer les affixes z_D et z_B des points D et B.

4. (a) Montrer que le point K est le milieu des segments $[DB]$ et $[AC]$.

(b) Montrer que $\dfrac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$.

(c) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

5. Complétez la figure obtenue à la question **2.** en plaçant les différents points construits dans les questions précédentes.

Exercice 2 - Suites et intégrales

On considère la suite de terme général, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^n \, dx$

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$, puis, donner son tableau de variations sur $[0, 1]$.

2. En déduire la monotonie de (I_n).

3. Montrer que (I_n) est convergente.

4. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

5. En déduire la limite de (I_n).

Problème - Fonction de Lambert

Le but du problème est de définir la fonction de Lambert et d'étudier certaines de ses propriétés. On considère dans tout ce problème, l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto xe^x \end{cases}$$

1. Donner les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 0 et -1.

4. Tracer soigneusement la courbe C_f représentative de la fonction f, ainsi que ses deux tangentes en 0 et -1.

5. Justifier que l'application $g : \begin{cases}]-1;+\infty[\longrightarrow \left]-e^{-1};+\infty\right[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.

Dans la suite du sujet, la bijection réciproque de g est notée W.

6. Justifier que W est dérivable sur $]-e^{-1};+\infty[$.

7. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.

8. Donner l'équation de la tangente à la courbe de W au point d'abscisse 0.

9. Tracer, sur le même graphique que C_f, la courbe C_W représentant W et sa tangente en 0.

10. Prouver que

$$\forall x \in]-e^{-1};+\infty[\setminus\{0\}, \quad W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

11. Démontrer que l'application $h : \begin{cases}]-\infty;-1] \longrightarrow \left[-\mathrm{e}^{-1};0\right[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.