Centre Des Classes Préparatoires LMVIE de Benguerir

Devoir surveillé N°5

21 Février 2025

Classes : MPSI **Durée :** 4h

Il est recommandé que l'élève :

- écrive avec un stylo bleu foncé ou noir,
- laisse une ligne vide entre deux réponses consécutives,
- laisse une marge verticale d'au moins 2.5 cm à gauche de chaque page.
- soigne sa copie et sa rédaction.

Le blanco et la calculatrice sont interdits.

Exercice

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^x + n\ln(1+x) - 2 = 0$ possède une unique solution $x_n \in]0,1[$.
2. Montrer que (x_n) est strictement décroissante et converge vers 0.
3. Prouver que $x_n \sim \frac{1}{n}$.
4. (a) Considérons la fonction définie par : $\forall x \in]-1, \ln(2)[,\ \phi(x) = \frac{\ln(1+x)}{2-e^x}$.
   A l'aide d'un développement limité de ϕ à l'ordre 1 en 0, calculer $\phi'(0)$.

   (b) En déduire qu'il existe des intervalles ouverts I et J contenant 0 et tels que

   $$\begin{cases} I \to J \\ x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{2-e^x} \end{cases}$$

   soit bijective. On note f cette fonction et g sa bijection réciproque.

   (c) Montrer que f et g admettent des développements limités à tous les ordres en 0.

   (d) Former un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

   (e) Former un développement limité à l'ordre 3 en 0 de g.
5. En déduire que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{5}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Problème 1

Dans ce problème, on propose une application du développement limité en algèbre.

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $M_p(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$, I_p la matrice unité de $M_p(\mathbb{R})$ et 0_p la matrice nulle de $M_p(\mathbb{R})$.
On dit qu'une matrice A de $M_p(\mathbb{R})$ est « toute-puissante sur $\mathbb{R}$ » et on notera en abrégé TP$\mathbb{R}$. si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B de $M_p(\mathbb{R})$ telle que $B^n = A$.
Si telle proposition est vraie pour $n = 2$, c'est-à-dire s'il existe une matrice R de $M_p(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$, R s'appelle une racine carrée de A dans $M_p(\mathbb{R})$
On aura besoin du résultat admis suivant :

Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$. L'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow M_p(\mathbb{R}) \\ P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k & \mapsto P(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k A^k \end{cases}$ est un morphisme d'algèbres ; pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X], \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.
2. $(P + \lambda Q)(A) = P(A) + \lambda Q(A)$.
3. $\varphi(1) = I_p$.

On rappelle également le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$:
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe un et un seul couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ pour lequel $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$, où $\deg(A)$ désigne le degré du polynôme A.

Partie 1

1. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $t \mapsto \sqrt{1+t}$.
   On note $\sqrt{1+t} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \underset{t \to 0}{o}(t^3)$ ce développement limité.

2. Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X).$$

3. Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $N^4 = 0_p$. Déduire de la question précédente une racine carrée de $I_p + N$ dans $M_p(\mathbb{R})$.

Partie 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} X^k$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\sqrt{1-4x} = 1 - 2xP_n(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^{n+1})$.
   (b) En déduire, à l'aide d'une division euclidienne, qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$1 - 4X = (1 - 2XP_n(X))^2 + X^{n+2} Q_n(X).$$

5. Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $N^p = 0_p$. Montrer que $I_p + N$ admet une racine carrée dans $M_p(\mathbb{R})$.

Partie 3

6. Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0.
   Démontrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(X) = X^p \times Q(X)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'on ait, au voisinage de 0 :
   $$1 + x = (U(x))^n + o(x^p)$$
   (on pourra utiliser un développement limité de $(1 + x)^\alpha$ pour un α bien choisi).

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
   $$1 + X = (U(X))^n + X^p \times Q(X).$$

   Applications

9. Soit $N \in M_p(\mathbb{R})$ telle que $N^p = 0_p$. Démontrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP$\mathbb{R}$.

10. En déduire que $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est TP$\mathbb{R}$.

Problème 2

Dans ce problème, on étudie quelques propriétés des fonctions log-convexes, et on résout une équation fonctionnelle sous certaines conditions.

1 Généralités

Définition 1 : Fonctions logarithmiquement convexes. On dit qu'une fonction f à valeurs dans $]0, +\infty[$ est *logarithmiquement convexe* (*log-convexe*) sur un intervalle J si la fonction $\ln f$ est convexe sur J.

Définition 2 : Convergence simple. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.

Soient (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et g une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite (f_n) *converge simplement* (CVS) vers g sur I si, pour tout x de I, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $g(x)$. On dit alors que l'application $g : I \to \mathbb{R}$ est la *limite simple* de la suite (f_n).

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton, et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction.

1. Montrer que si f est log-convexe sur I, alors f est convexe sur I. La réciproque est-elle vraie ?

2. Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}$.
   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction à préciser.

3. La limite simple d'une suite de fonctions continues sur un intervalle, est-elle continue sur cet intervalle? si oui, on justifie sa réponse, sinon on donne un contre-exemple.

4. Montrer que la limite simple d'une suite de fonctions convexes sur I est convexe sur I.

5. Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}_+^*$ log-convexes sur I, qui converge simplement sur I vers une fonction g définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que g est log-convexe sur I.

On souhaite démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est log-convexe sur I;
(ii) pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe sur I;
(iii) pour tous réels x, y dans I et tout réel $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda} (f(y))^{\lambda} ;$$

6. Montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$.
7. On va établir que $(ii) \Rightarrow (iii)$.
   (a) Soient x, y fixés dans I tels que $x < y$ et $\lambda \in]0,1[$, considérons la fonction définie par: $\forall \alpha > 0, \phi(\alpha) = (1-\lambda).\alpha^{-\lambda(y-x)}.f(x) + \lambda.\alpha^{(1-\lambda)(y-x)}.f(y)$.
   Calculer $\inf\limits_{\alpha>0} \phi(\alpha)$.
   (b) En déduire que $(ii) \Rightarrow (iii)$.
8. Conclure que (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.
9. Montrer que si f et $g : I \to \mathbb{R}_+^*$ sont log-convexes sur I, alors $f+g$ l'est aussi.

2 Théorème de Bohr Mollerup

Dans cette partie on souhaite prouver le théorème suivant :
Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}_+^*$ telle que :

- $f(1) = 1$.
- $\forall x > 0, f(x+1) = xf(x)$.
- f est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.1 Existence

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Pi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

10. Par un argument de convexité, prouver que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(t) \leq t-1$.
11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \geq 1 + \frac{x}{n+1}$.
12. En déduire que $(\Pi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\ln(x\Pi_n(x))$ en fonction de $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.
14. On admet que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent. Déduire des questions précédentes que $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la limite simple de $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ i.e

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \Pi_n(x).$$

15. Monter que Γ est à valeurs strictement positives.
16. Montrer que $\Gamma(1) = 1$.
17. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
18. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\Gamma(n)$.
19. Prouver que Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a ainsi une solution de notre problème.

2.2 Unicité

Soit f une fonction vérifiant les 3 conditions, soient $x \in]0,1]$ et $n \geq 2$.

20. Démontrer que $(n-1)^x \leq \frac{f(n+x)}{f(n)} \leq n^x$.
21. En déduire que $\Pi_{n-1}(x) \leq f(x) \leq \frac{n+x}{n}\Pi_n(x)$.
22. Prouver que $f = \Gamma$.

Remarque : La fonction Γ est une fonction spéciale et très omniprésente en Mathématiques, elle a plusieurs expressions, celle que l'on a utilisée s'appelle la formule de Gauss. On peut montrer par exemple, et on ne demande pas de le faire bien sûr :
Formule des compléments

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \text{(pour } 0 < x < 1\text{)}$$

Formule de duplication

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{4^x}\Gamma(2x) \quad \text{(pour } x > 0\text{)}$$

Formule de Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty} e^{-x/n}\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad \text{(pour } x > 0\text{)}$$

où γ désigne la constante d'Euler.

Fin du problème

Fin de l'épreuve