Centre Des Classes Préparatoires LM6E de Benguerir

Corrigé du devoir surveillé N°5

21 Février 2025

Classes : MPSI **Durée :** 4h

Exercice

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction f_n définie par : $\forall x > -1, \quad f_n(x) = e^x + n\ln(1+x) - 2$. On remarque que f_n est continue sur $]-1, +\infty[$. En outre, $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = e + n\ln(2) - 2 > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n s'annule sur $]0,1[$. Par ailleurs, f_n est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$, d'où l'unicité de ce zéro qu'on note x_n. On a ainsi une suite (x_n) à valeurs dans $]0,1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x_n) = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) &= e^{x_{n+1}} + n\ln(1+x_{n+1}) - 2 \\ &= f_{n+1}(x_{n+1}) - \ln(1+x_{n+1}) \\ &= f_n(x_n) - \ln(1+x_{n+1}) \\ &< f_n(x_n). \quad (\text{car } x_{n+1} > 0) \end{aligned}$$
Puisque f_n est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$, on déduit que $x_{n+1} < x_n$. D'où la stricte décroissance de (x_n). D'ailleurs, (x_n) est minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers un réel L. Comme de plus elle est à valeurs dans $]0,1[$, on conclut que $L \in [0,1]$.(On pouvait même exclure le 1.)
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(1+x_n) = \frac{2-e^{x_n}}{n}$. La continuité de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de la fonction exp sur $\mathbb{R}_+$ assure par passage à la limite dans l'égalité précédente que $\ln(1+L) = 0$, soit $L = 0$. Ainsi (x_n) est strictement décroissante et converge vers 0.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \ln(1+x_n) = \frac{2-e^{x_n}}{n}$. Puisque la suite (x_n) tend vers 0, alors $\ln(1+x_n) \sim x_n$ et $\frac{2-e^{x_n}}{n} \sim \frac{1}{n}$, on en déduit que $x_n \sim \frac{1}{n}$.

4. (a) On peut passer par le produit et le quotient des DL, ou par les équivalents. Au voisinage de 0, on a $\ln(1+x) \sim x$ et $2 - e^x \sim 1$, donc $\phi(x) \sim x$. Autrement dit, le $\mathrm{DL}_1(0)$ de ϕ est donné par : $\phi(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Ce qui implique que $\phi'(0) = 1$ (et $\phi(0) = 0$).

   (b) Les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto 2 - e^x$ sont de classe C^1 sur $]-1,\ln(2)[$, et $x \mapsto 2-e^x$ ne s'annule pas sur cet intervalle, donc ϕ est de classe C^1 sur $]-1,\ln(2)[$, en particulier ϕ' est continue en 0. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $\mu > 0$, tel que pour tout $x \in [-\mu,\mu]\cap]-1,\ln(2)[$, $\phi'(x) > 1 - \frac{1}{2} > 0$. Ainsi, il existe $a < 0$ et $b > 0$ tels que $[a,b] \subset]-1,\ln(2)[$ et pour tout $x \in [a,b], \phi'(x) > 0$. (Par exemple $a = -\frac{\min(\mu,\ln(2))}{2}$ et $b = -a$.)
   Dès lors, ϕ est strictement croissante et continue sur $[a,b]$, donc sa restriction sur $]a,b[$ réalise une bijection de cet intervalle vers $]\phi(a),\phi(b)[$. Sachant que $\phi(a) < \phi(0) = 0$ et $\phi(b) > \phi(0) = 0$, en posant $I =]a,b[$ et $J =]\phi(a),\phi(b)[$, on aboutit au résultat demandé.

   (c) Comme dans la question précédente, on justifie que la fonction f est indéfiniment dérivable sur l'intervalle I. En outre, par construction sa dérivée ne s'annule pas sur

I, ceci justifie bien que sa bijection réciproque g est également indéfiniment dérivable sur J. Puisque 0 appartient à la fois à l'intervalle I et J, d'après la formule de Taylor-Young, il résulte que les deux fonctions f et g admettent un développement limité en 0 à tous les ordres.

(d) Au voisinage de 0, on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3),$$

et

$$2 - e^x = 1 - \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Donc

$$\frac{1}{2-e^x} = 1 + x + \left(\frac{1}{2}+1\right)x^2 + o(x^2) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Ainsi

$$f(x) = x + \left(-\frac{1}{2}+1\right)x^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

(e) On sait que $f(0) = 0$, donc $g(0) = 0$.
Soient a, b, c des réels tels que

$$g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

En composant par le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f, un petit calcul donne

$$g(f(x)) = ax + \left(\frac{a}{2} + b\right)x^2 + \left(\frac{4a}{3} + b + c\right)x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Or, pour tout $x \in I, g(f(x)) = x$. Par unicité du $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \mapsto x$, on trouve les valeurs de $a, b,$ et c, et on déduit que :

$$g(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

5. Étant donné que (x_n) tend vers 0, alors à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n \in I$ (on peut voir l'intervalle ouvert I comme un voisinage de 0, ou bien appliquer la définition de la limite pour $\varepsilon = b$ défini dans la réponse à 4.b.). Pour tout $n > N$, on a $n\ln(1+x_n) = 2 - e^{x_n}$, donc $f(x_n) = \frac{1}{n}$, ou encore $x_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$.

   Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'après la question 4.e, on obtient que

$$g\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{5}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

   Soit

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{5}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Problème 1

Partie 1

1. $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + \underset{x\to 0}{o}(t^3)$.

2. **Méthode 1 : Par calcul**

   On calcule explicitement $1 + X - \left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3\right)^2$ et on trouve que $Q = -\frac{1}{256}X^2 + \frac{1}{64}X - \frac{5}{64}$.
   Méthode 2 : On peut s'inspirer des réponses aux questions 4.b) et 6).

3. Compte tenu du morphisme d'algèbres rappelé dans l'énoncé, de la question précédente, ainsi que de l'hypothèse sur N, on déduit qu'une racine carrée de N est donnée par : $I_n + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 + \frac{1}{16}N^3$.

Partie 2

4. (a) Puisque $4x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, alors

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-4x)^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})\cdots(\frac{3-2k}{2})}{k!}(-1)^k 4^k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-3)}{k!}2^k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{(k+1)!}2^{k+1} x^{k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}) \\
&= 1 - 2x\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(k+1)!\,k!}x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}) \\
&= 1 - 2x\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}) \\
&= 1 - 2xP_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).
\end{aligned}$$

   (b) D'après la question précédente, on déduit que

$$1 - 4x = (1 - 2xP_n(x))^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).$$

   Considérons le polynôme $P(X) = 1 - 4X - (1 - 2XP_n(X))^2$. D'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ rappelé dans l'énoncé, il existe deux polynômes Q_n, R_n de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X) = X^{n+2}Q_n(X) + R_n(X) \quad \text{et} \quad \deg(R_n) \leq n+1.$$

   Remarquons que $P(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$ et $x^{n+2}Q_n(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$. De ce fait, $R_n(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$. (*)

   En ce donnant $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels tels que $R_n(X) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$, il s'avère qu'au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}) \\ &= \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}). \quad \text{(D'après (*))}\end{aligned}$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de $x \mapsto R_n(x)$, On déduit que pour tout $k \in [[0, n+1]]$, $a_k = 0$, et donc R_n est le polynôme nul.
Par conséquent, il existe bien $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$1 - 4X = (1 - 2XP_n(X))^2 + X^{n+2}Q_n(X).$$

5. Application directe de la question précédente en remarquant que $I_p + N = I_p - 4\left(\frac{-1}{4}N\right)$.

Partie 3

6. C'est exactement la même idée que dans la question 4.b.
D'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe deux polynômes $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$V(X) = X^p Q(X) + R(X) \quad \text{et} \quad \deg(R) \leq p - 1.$$

Comme $V(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^p)$, alors $V(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^{p-1})$. De même, $x^p Q(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^{p-1})$. Il en découle que $R(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^{p-1})$. Mais pour certains réels $a_0, \ldots, a_{p-1}$, on a au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}R(x) &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{p-1}\right).\end{aligned}$$

On conclut par unicité du DL.

7. Posons $U(X) = 1 + \frac{1}{n}X + \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)\ldots(\frac{1}{n}-p+1)}{p!}X^p$.

On sait que $(1+x)^{\frac{1}{n}} = U(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^p)$. D'où,

$$\begin{aligned}1 + x &= \left(U(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^p)\right)^n \\ &= (U(x))^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (U(x))^{n-k} (\underset{x\to 0}{o}(x^p))^k \\ &= (U(x))^n + \underset{x\to 0}{o}(x^p).\end{aligned}$$

8. On se donne un entier naturel non nul n et on considère le polynôme $V(X) = 1 + X - (U(X))^n$. On applique ensuite les deux questions précédentes.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question 8 qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $1 + X = (U(X))^n + X^p \times Q(X)$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}I_p + N &= (U(N))^n + N^p Q(N) \\ &= (U(N))^n.\end{aligned}$$

Par suite, $I_p + N$ est bien TP$\mathbb{R}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $A = 2I_3 + B$, ou encore $A = 2\Big(I_3 + \frac{1}{2}B\Big)$.
La matrice $\frac{1}{2}B$ est triangulaire supérieure stricte (à diagonale nulle), donc elle est nilpotente et vérifie
$$\Big(\frac{1}{2}B\Big)^3 = 0_3.$$
(Si l'on ne connaît pas encore cet argument, une vérification à la main règle l'affaire !)
D'après la question 9, il existe $C \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C^n = I_3 + \frac{1}{2}B$.
Ainsi,
$$\begin{aligned} A &= 2\Big(I_3 + \frac{1}{2}B\Big) \\ &= \Big(2^{\frac{1}{n}}\Big)^n C^n \\ &= D^n, \quad \text{avec } D = 2^{\frac{1}{n}}C. \end{aligned}$$
Par conséquent, A est TP$\mathbb{R}$.

Problème 2

1 Généralités

1. Supposons que f est log-convexe sur I. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. On a
$$\ln(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \le \lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y).$$
Par ailleurs, vu la concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors
$$\lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y) \le \ln(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)).$$
D'où,
$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \ln(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \le \ln(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)).$$
La fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit que f est convexe sur I.
Pour la réciproque, on considère la fonction $f : x \mapsto x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ alors que $x \mapsto \ln(x)$ ne l'est pas.

2. Soit $x \ge 0$. On remarque que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{1 + n(1+x)} = \dfrac{1}{1+x}$.
Ceci suffit pour conclure que la suite de fonctions $(f_n)_{n \ge 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction g définie par : $\forall x \ge 0,\ g(x) = \frac{1}{1+x}$.

3. La réponse est négative. On peut considérer par exemple la suite de fonctions définie par :$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^n$.
En effet, soit $x \in [0,1]$. Si $x = 1$, $(f_n(x))$ converge vers 1, sinon $(f_n(x))$ tend vers 0. Ainsi, (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction
$$g : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1[\\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

D'ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$, mais g n'est pas continue en 1.

4. Soit (f_n) une suite de fonctions convexes qui converge simplement sur I vers une fonction $g : I \to \mathbb{R}$. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0;1]$, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y).$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :
$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y).$$
Ce qui fournit la convexité de g sur I.

5. Soit $x \in I$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$, donc par continuité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} ln(f_n(x)) = ln(g(x))$. Autrement dit, la suite de fonctions convexes $(ln(f_n))$ converge simplement sur I vers $x \mapsto ln(g(x))$, donc d'après la question précédente, cette limite simple est convexe sur I, ce qui est équivalent à dire que g est log-convexe sur I.

6. Supposons que f est log-convexe sur I, alors pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \ln(\alpha^x f(x)) = x\ln(\alpha) + \ln(f(x))$ est convexe sur I, comme somme de deux fonctions convexes sur I, ce qui signifie que $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est log-convexe sur I, donc convexe sur I d'après la question 1.

7. (a) La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, sa dérivée est donnée par :
$$\forall \alpha > 0,\ \phi'(\alpha) = \lambda(1-\lambda)(y-x)\alpha^{-\lambda(y-x)-1}\left(\alpha^{y-x} f(y) - f(x)\right).$$
Une étude de signe de ϕ' sur $\mathbb{R}_+^*$ permet de conclure que ϕ admet un minimum global sur $\mathbb{R}_+^*$ en $\alpha = (\frac{f(x)}{f(y)})^{\frac{1}{y-x}}$ dont l'image par ϕ vaut $(f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda$.

   Ainsi, $\inf\limits_{\alpha>0} \phi(\alpha) = (f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda$.

   (b) Faisons l'hypothèse que pour tout $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe sur I. Soients $x < y$ fixés dans I et λ fixé dans $]0,1[$, pour tout $\alpha > 0$ on a
$$\alpha^{(1-\lambda)x+\lambda y} f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\alpha^x f(x) + \lambda \alpha^y f(y),$$
ou encore
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \varphi(\alpha) = (1-\lambda)\alpha^{-\lambda(y-x)} f(x) + \lambda \alpha^{(1-\lambda)(y-x)} f(y),$$
Soit
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \inf_{\alpha>0} \phi(\alpha) = (f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda.$$
Le cas où $y < x$ en découle facilement, et si $\lambda \in \{0,1\}$ l'inégalité est immédiate.

   Ainsi,
$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda.$$

8. Au prime abord, on montre que $(iii) \Rightarrow (i)$. Pour cela, on utilise la croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$. En vertu des questions 6 et 7, on conclut que les trois assertions sont équivalentes.

9. Soient f et $g : I \to \mathbb{R}_+^*$ deux fonctions log-convexes sur I. D'après la question précédente, pour tout $\alpha > 0$, les fonctions $x \mapsto \alpha^x f(x)$ et $x \mapsto \alpha^x g(x)$ sont convexes sur I. Il s'ensuit que pour tout $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \alpha^x(f(x) + g(x))$ est convexe sur I, comme somme de deux fonctions convexes sur I, et là-encore, d'après la question précédente, on conclut que $f + g$ est log-convexe sur I.

2 Théorème de Bohr Mollerup

Dans cette partie on souhaite prouver le théorème suivant :
Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}_+^*$ telle que :

- $f(1) = 1$.
- $\forall x > 0, f(x+1) = xf(x)$.
- f est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.1 Existence

10. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sa courbe représentative est au dessous de toutes ses tangentes, en particulier la tangente au point d'abscisse 1. Sachant que $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$, on déduit que $\forall t > 0,\, \ln(t) \leq t - 1$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons La fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^t$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^t \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) g(t) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Par suite, g est croissante sur $\mathbb{R}$, et il en est de même que g'. Partant, g est convexe sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que le graphe de g est au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0. Sachant que $g(0) = 1$ et $g'(0) = \ln(1 + \frac{1}{n})$, on déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) \geq \ln(1+\frac{1}{n})t + 1. \quad (*)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &\geq 1 - \frac{n}{n+1} \quad \text{(D'après la question précédente)} \\ &\geq \frac{1}{n+1}. \quad (**) \end{aligned}$$

De (*) et (**), on obtient que pour tout $t \geq 0$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^t \geq \frac{t}{n+1} + 1$.

D'où, pour $t = x$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \geq 1 + \frac{x}{n+1}.$$

12. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_n(x) > 0$. D'ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi_n(x)} &= \frac{(n+1)^x(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)} \times \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \times \frac{n+1}{x+n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \times \frac{n+1}{x+n+1} \\
&\geq \left(1+\frac{x}{n+1}\right) \times \frac{n+1}{x+n+1} \quad \text{(D'après la question précédente)} \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

D'où la croissance de la suite $(\Pi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un calcul simple montre que $\ln(x\Pi_n(x)) = x\ln(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

14. On va montrer en premier lieu que la suite $(\Pi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

    On rappelle que pour tout $t \geq 0$, $\ln(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$; que l'on peut démontrer par une étude de fonction ou par la formule de Taylor avec reste intégral.

    Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [[1,n]]$, $\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \geq \frac{x}{k} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{k^2}$, et donc,

$$\begin{aligned}
\ln(x\Pi_n(x)) &\leq x\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{k^2}\right) \\
&\leq x\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}x^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

    En vertu du résultat admis, on déduit que $\left(x\left(\ln n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}x^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et donc elle est majorée par un réel M. Par conséquent, vu que $x > 0$ et que la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, on aboutit à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Pi_n(x) \leq \frac{1}{x}e^M.$$

    Récapitulons ; pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a prouvé que $(\Pi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, et par la question 12, elle est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. On obtient ainsi la convergence simple de $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

15. Soit $x > 0$. Comme $(\Pi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers $\Gamma(x)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_n(x) \leq \Gamma(x)$, mais d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_n(x) > 0$. On en déduit que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$, soit Γ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Pi_n(1) = \frac{nn!}{1\cdot 2\cdots n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

    Donc $\Gamma(1) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$.

17. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\Pi_n(x+1) &= \frac{n^{x+1}n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\\ &= \frac{nx}{x+n+1} \times \frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\\ &= \frac{nx}{x+n+1}\Pi_n(x).\end{aligned}$$

Comme $\frac{nx}{x+n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, on obtient $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, par unicité de la limite.

18. Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$.

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $x > 0$, $\ln(\Pi_n(x)) = x\ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$ Ainsi, la fonction $\ln(\Pi_n)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme somme finie de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$, $\ln(\Pi_n)''(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} > 0$.
Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Π_n est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme la limite simple de $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs strictement positives, on déduit d'après la question 5 qu'elle est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire, Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a ainsi une solution de notre problème.

2.2 Unicité

20. Par hypothèse sur f, $\ln(f)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, donc vu que $n-1 \leq n+x \leq n+1$, en vertu de la croissance de la fonction $t \mapsto \frac{\ln(f(t))-\ln(f(n))}{t-n}$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{n\}$, on trouve :

$$\ln\Big(f(n)\Big) - \ln\Big(f(n-1)\Big) \leq \frac{\ln\Big(f(n+x)\Big) - \ln\Big(f(n)\Big)}{x} \leq \ln\Big(f(n+1)\Big) - \ln\Big(f(n)\Big).$$

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*, f(t+1) = tf(t)$. En particulier, $f(n) = (n-1)f(n-1)$ et $f(n+1) = nf(n)$. Comme $x > 0$, on déduit que

$$x\ln(n-1) \leq \ln\Big(\frac{f(n+x)}{f(n)}\Big) \leq x\ln(n).$$

Vu la croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on conclut que

$$(n-1)^x \leq \frac{f(n+x)}{f(n)} \leq n^x.$$

21. Par récurrence, on montre que $f(x+n) = (n+x-1)(n+x-2)\cdots xf(x)$ et $f(n) = (n-1)!$.
Les deux inégalités précédentes deviennent

$$(n-1)^x \leq \frac{(x+n-1)\cdots x \times f(x)}{(n-1)!} \leq n^x,$$

ou encore

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{x\cdots(x+n-1)} = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{x+n}{n},$$

soit

$$\Pi_{n-1}(x) \leq f(x) \leq \frac{n+x}{n}\Pi_n(x).$$

22. D'après la question précédente, pour tout entier naturel supérieur ou égal 2, on a :

$$\Pi_{n-1}(x) \leq f(x) \leq \frac{n+x}{n}\Pi_n(x).$$

Or, $\Pi_{n-1}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$, et $\dfrac{n+x}{n}\Pi_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$. D'après le théorème des gendarmes, on déduit que $f(x) = \Gamma(x)$. On a montré donc que pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.
Soit $x > 1$. Si $x \in \mathbb{N}$, alors $f(x) = (x-1)! = \Gamma(x)$. Sinon,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f((x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor) \\
&= f(y+n) \quad (\text{où on a posé } y = x - \lfloor x \rfloor \text{ et } n = \lfloor x \rfloor) \\
&= (n+y-1)(n+y-2)\cdots y f(y) \\
&= (n+y-1)(n+y-2)\cdots y\Gamma(y) \quad (\text{ car } y \in]0,1]) \\
&= \Gamma(y+n) \\
&= \Gamma(x).
\end{aligned}$$

On déduit que pour tout $x > 0$, $f(x) = \Gamma(x)$. Les deux fonctions ayant de plus le même ensemble de départ et d'arrivée, on déduit qu'elles sont égales.

Fin du corrigé