

Fonctions Usuelles

M. ECH-CHAMMAKHY Mohammed

28 septembre 2025

Introduction

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité de ce qui a été vu en terminale, ou même avant, partant des fonctions trigonométriques jusqu'aux fonctions racine $n^{\text{ième}}$, logarithme et exponentielle.

Propriétés de la fonction sinus (Rappels)

Propriétés

La fonction sinus, notée $\sin$, est :

- *à valeurs dans $[-1, 1]$,*
- *2π -périodique,*
- *impaire,*
- *dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc continue),*
- *pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.*

Exercice : Inégalités sur le sinus

- 1 Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
- 2 Montrer que pour tout x dans $[0, \pi/2]$, $\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}$.

Propriétés de la fonction cosinus(Rappels)

Propriétés

La fonction cosinus, notée $\cos$, est :

- *à valeurs dans $[-1, 1]$,*
- *2π -périodique,*
- *paire,*
- *dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc continue),*
- *pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.*

Proposition

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

Proposition

- $\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y))$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y))$

Formules de duplication :

Proposition

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

- $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$,
- $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$,
- $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$.
- $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

Exercice : Une équation

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi]$, l'équation suivante :

$$3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{6}$$

Propriétés de la fonction tangente

Propriétés

La fonction tangente, notée $\tan$, est :

- définie par $\tan = \frac{\sin}{\cos}$,
- définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$,
- impaire,
- π -périodique,
- dérivable sur les intervalles $\left] \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (et donc continue),
- pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Exercice : Inégalité sur la tangente

Montrer que pour tout x dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $|\tan(x)| \geq |x|$.

Theorem

La restriction de la fonction sinus sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de ce segment vers $[-1, 1]$. La bijection réciproque est appelée fonction arcsinus et est notée $\arcsin$, ainsi :

$$\arcsin : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y & \longrightarrow \arcsin y \end{cases}$$

Soit :

$$\forall y \in [-1, 1], \sin(\arcsin y) = y$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin x) = x$$

ATTENTION!!!

$$\arcsin(\sin(2\pi)) = \arcsin(0) = 0 \neq 2\pi!!!!!!!!$$

Propriétés

La fonction arcsin est :

- *impaire.*
- *strictement croissante sur $[-1, 1]$.*
- *continue sur $[-1, 1]$.*
- *dérivable sur $] - 1, 1[$ et*

$$\forall y \in] - 1, 1[, \quad \arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

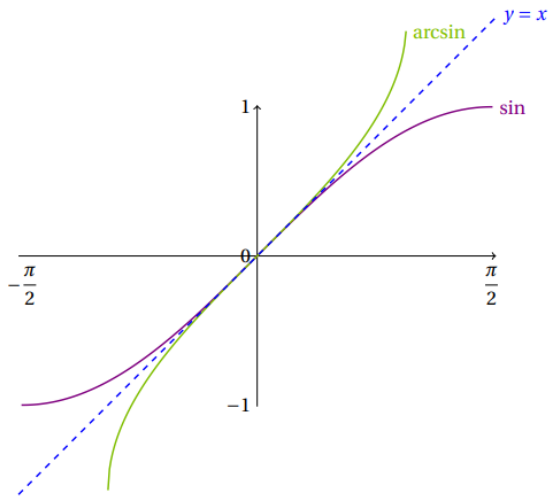


Figure – Graphe de la fonction sinus et arcsinus.

La fonction Arccosinus

La restriction de la fonction cosinus est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
Sa bijection réciproque est appelée fonction arccosinus et est notée $\arccos$:

$$\arccos : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow [0, \pi] \\ y & \longrightarrow \arccos y \end{cases}$$

$$\text{Soit } \forall y \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos y) = y$$

$$\text{et } \forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos x) = x$$

ATTENTION!!!

$$\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi!!!!!!!!$$

Propriétés

La fonction arccos est :

- *strictement décroissante sur $[-1, 1]$.*
- *continue sur $[-1, 1]$.*
- *dérivable sur $] - 1, 1[$ et*

$$\forall y \in] - 1, 1[, \quad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

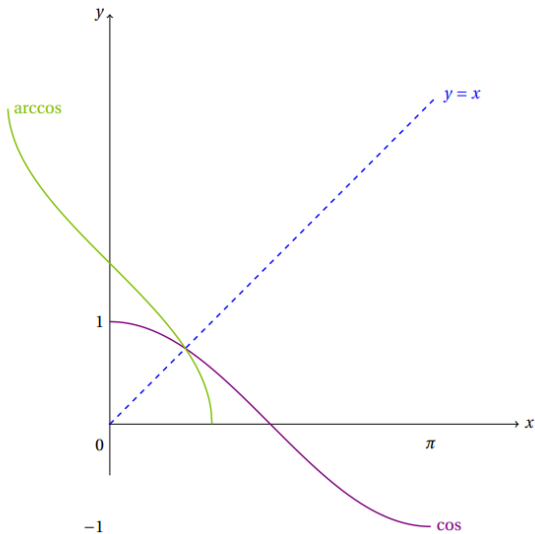


Figure – Graphe de la fonction cosinus et arccosinus.

Quelques valeurs remarquables

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin } x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{Arccos } x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

- 1 Montrer (par deux méthodes) que pour tout x dans $[-1, 1]$,
 $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
- 2 Interpréter géométriquement ce résultat.

- 1 Dériver une fonction bien choisie ou considérer $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)$.
- 2 Les graphes des deux fonctions $\arcsin$ et $\arccos$ sont symétriques par rapport à la droite $y = \frac{\pi}{4}$.

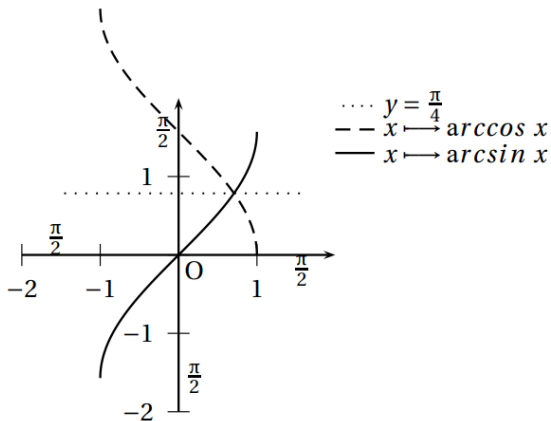


Figure – Illustration de la symétrie évoquée dans la question 3.

La fonction Arctangente

La restriction de la fonction tangente sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de cet intervalle vers $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée fonction arctangente et est notée $\arctan$:

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow &] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ y & \longrightarrow & \arctan y \end{cases}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan y) = y$$

$$\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan x) = x$$

Propriétés

La fonction $\arctan$ est :

- *strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
- *impaire.*
- *continue sur $\mathbb{R}$.*
- *dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$

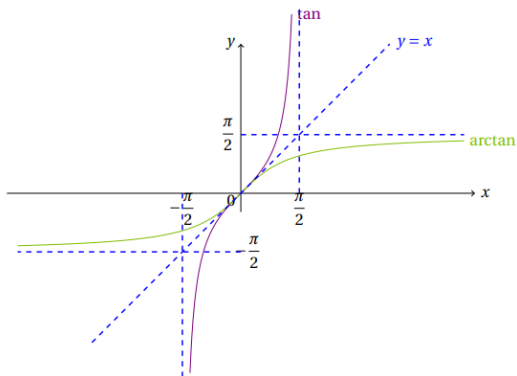


Figure – Graphe de la fonction tangente et arctangente.

① Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|\arctan(x)| \leq |x|$.

② Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

- ① Utiliser l'inégalité des accroissements finis.
- ② Dériver puis conclure.

Définition du logarithme népérien

Définition

On appelle logarithme népérien et on note $\ln$ l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* : x \mapsto \frac{1}{x}$, c'est-à-dire

$$\ln : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_1^x \frac{dt}{t} \end{cases}$$

Propriétés

La fonction $\ln$ est :

- continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
- dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$,
- concave sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$,
- $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$,
- $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$,
- $\frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$,
- $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Propriétés

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^n) = n \ln x$

On appelle nombre de Néper l'unique réel e vérifiant $\ln e = 1$.

Exercice : Inégalité classique

- 1 Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$
- 2 En déduire que :

$$\forall n \geq 2, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Définition du logarithme de base a

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle logarithme de base a l'application $\log_a$ définie par

$$\log_a x : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\ln x}{\ln a} \end{cases}$$

Remarque

- Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal qu'on note $\log$.
- Si $a = e$, $\log_a = \ln$.

Propriétés

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction $\log_a$ est :

- dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

- Si $a > 1$, $\log_a$ est strictement croissante et concave.
- Si $a \in]0, 1[$, $\log_a$ est strictement décroissante et convexe.

Propriétés du logarithme de base a (suite)

Propriétés

Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$:

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

Exercice : Deux équations

Résoudre les équations suivantes en déterminant leur domaine de validité :

- $\log_a x = \log_x a$ où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
- $\log_3 x - \log_2 x = 1$

Définition de la fonction exponentielle

Definition

La fonction $\ln$ définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée fonction exponentielle et notée $\exp$.

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ y & \longmapsto \exp(y) \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp(\ln(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(y)) = y$$

Propriétés

La fonction $\exp$ est :

- *strictement croissante et strictement positive,*
- *continue sur $\mathbb{R}$,*
- *dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x),$*
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty,$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1.$

Propriétés de la fonction exponentielle (suite)

Propriétés

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$,
- $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$,
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,
- $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

Exercice : Inégalité classique et inéquation

- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x \geq 1 + x$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\exp(x^2) > (\exp(x))^4 \times e$.

Definition

Soit $x > 0$.

- **Puissances quelconques** : Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on appelle x *puissance* y le réel $x^y = \exp(y \ln x)$.
- **Racines $n^{\text{ièmes}}$** : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *racine $n^{\text{ième}}$* de x le réel $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Propriétés

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. Elle est concave si $\alpha \in [0, 1]$ et convexe sinon.
- $$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in]0, 1] : & \alpha \leq \beta \implies x^\beta \leq x^\alpha. \\ \text{Pour tout } x \in [1, +\infty[: & \alpha \leq \beta \implies x^\alpha \leq x^\beta. \end{cases}$$
- **Prolongement par continuité en 0** : Pour $\alpha > 0$, on pose $0^\alpha = 0$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ ainsi prolongée est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Propriétés

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $\exp(x) = e^x$
- $\ln(x^a) = a \ln x$
- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $x^a y^a = (xy)^a$

Graphe des fonctions puissances

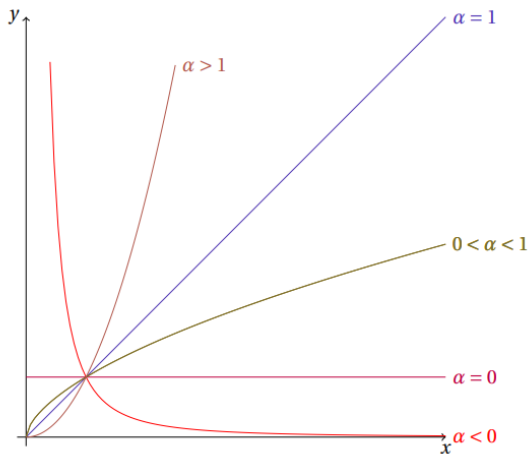


Figure – Graphe des fonctions puissances.

Exercice : Etude d'une fonction

Etudier la fonction définie par $f(x) = x^{x+1}$

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle

Theorem

Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad \frac{x^\beta}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad x^\alpha |\ln x|^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Exercice : Quelques limites

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}$

Definition

- La fonction sinus hyperbolique, notée $\sinh$, est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

- La fonction cosinus hyperbolique, notée $\cosh$, est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

Propriétés

La fonction $\sinh$ est :

- *Impaire*
- *Continue sur $\mathbb{R}$*
- *Dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} : \sinh'(x) = \cosh(x)$*
- *Strictement croissante sur $\mathbb{R}$*
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = +\infty$

Propriétés

La fonction cosh est :

- *Paire*
- *Continue sur $\mathbb{R}$*
- *Dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$: $\cosh'(x) = \sinh(x)$*
- *Strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$.*
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = +\infty$

Graphe des fonctions cosh et sinh

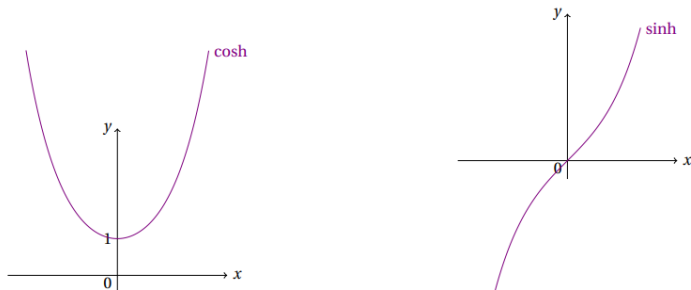


Figure – Graphes de la fonction cosh et sinh.

La fonction tangente hyperbolique

Definition

La fonction *tangente hyperbolique*, notée $\tanh$, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tanh : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{cases}$$

Propriétés

La fonction $\tanh$ est :

- *Impaire,*
- *Dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$*
- *Strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0*
- *Convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}^+$ avec un point d'inflexion en 0*
- *Admet deux asymptotes horizontales d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$*

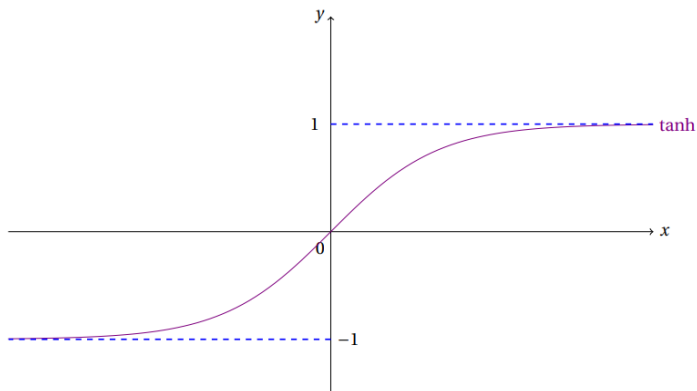


Figure – Graphe de la fonction $\tanh$.

Propriétés

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

- $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$
- $\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$
- $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
- $\operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
- $\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$
- $\operatorname{th}(x - y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$

Exercice : Un simple calcul

- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cosh(a + kb) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sinh(a + kb).$$

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2 \arctan(\tanh x) = \arctan(\sinh 2x).$$

Definition

La fonction sinus hyperbolique définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée fonction argument sinus hyperbolique et notée $\operatorname{arcsinh}$:

$$\operatorname{arcsinh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longrightarrow \operatorname{arcsinh} y \end{cases}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \sinh(\operatorname{arcsinh} y) = y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arcsinh}(\sinh x) = x$$

Propriétés

La fonction arcsinh est :

- *impaire.*
- *continue sur $\mathbb{R}$.*
- *dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arcsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

- *strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
- *réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

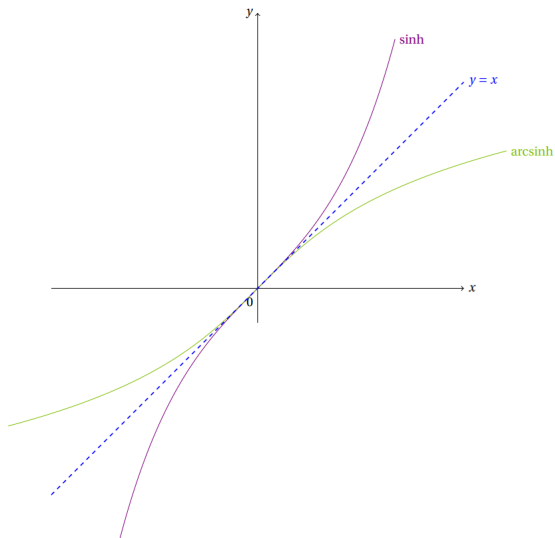


Figure – Graphe de la fonction arcsinh.

Definition

La fonction cosinus hyperbolique, restreinte à $\mathbb{R}_+$, définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur son image $[1, +\infty[$. L'application réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et est notée $\operatorname{arccosh}$.

$$\operatorname{arccosh} : \begin{cases} [1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \argch y \end{cases}$$

$$\forall y \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{ch}(\operatorname{arccosh} y) = y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{arccosh}(\operatorname{cosh} x) = x$$

Propriétés

La fonction arccosh est :

- *continue sur $[1, +\infty[$.*
- *est dérivable sur $]1, +\infty[$ et :*

$$\forall y \in]1, +\infty[, \quad \operatorname{arccosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

- *est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.*
- *réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.*

Fonction argument cosinus hyperbolique

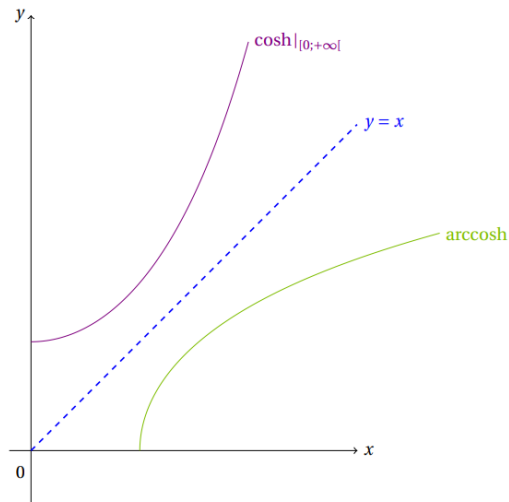


Figure – Graphe de la fonction $\operatorname{arccosh}$.

Definition

La fonction tangente hyperbolique définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $] -1, 1[$. L'application réciproque est appelée Argument tangente hyperbolique et est notée $\operatorname{arctanh}$.

$$\operatorname{arctanh} : \begin{cases}] -1, 1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \operatorname{arctanh} y \end{cases}$$

$$\forall y \in] -1, 1[, \tanh(\operatorname{arctanh} y) = y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{arctanh}(\tanh x) = x$$

Propriétés

La fonction $\operatorname{arctanh}$ est :

- *impaire.*
- *strictement croissante sur $] - 1, 1[$.*
- *continue sur $] - 1, 1[$.*
- *dérivable sur $] - 1, 1[$ et*

$$\forall y \in] - 1, 1[, \quad \operatorname{arctanh}' y = \frac{1}{1 - y^2}.$$

- *réalise une bijection de $] - 1, 1[$ dans $\mathbb{R}$*

Fonction argument tangente hyperbolique

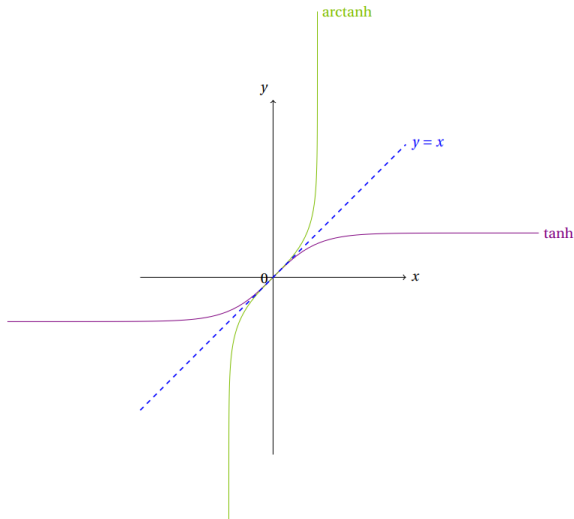


Figure – Graphe de la fonction $\operatorname{arctanh}$.

Theorem

- $\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\forall x \in [1, +\infty[: \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- $\forall x \in]-1, 1[: \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right)$