TD : Fonctions usuelles

1 Fonctions trigonométriques

Exercice 1

En étudiant la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x - x \end{array} \right.$

Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi]$, l'équation suivante :

$$3cos(x) - \sqrt{3}sin(x) = \sqrt{6}$$

Exercice 3

Montrer que pour tout x dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $|\tan(x)| \geq |x|$.

Exercice 4

Calculer

1. $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$
2. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\arccos(\cos(4\pi))$
4. $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4}))$
5. $\arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

Exercice 5

1. Montrer (par deux méthodes) que pour tout x dans $[-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 6

On pose $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression simplifiée de f.

Exercice 7

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|\arctan(x)| \leq |x|$.
2. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Exercice 8

On pose dans tout cet exercice
$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de la fonction f, puis un ensemble d'étude intelligent pour f.
2. Calculer les images $f(0)$, $f(1)$ et $f(\sqrt{3})$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f, après avoir précisé les valeurs de x pour lesquelles cette dérivée existe.
4. Simplifier l'expression de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.
5. Montrer que, $\forall x \geq 1$, $f(x) = \pi - 4\arctan(x)$.
6. Donner le tableau de variations complet de f, puis tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 9

Soit $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

1. Déterminer son domaine de définition, son domaine de dérivabilité et sa dérivée.
2. En déduire une expression simplifiée de f.

Exercice 10

Pour tout entier naturel n, on pose

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

1. Préciser le domaine de définition de la fonction T_n.
2. Calculer $T_n(1)$, $T_n(0)$ et $T_n(-1)$.
3. Posons $g(x) = T_n(\cos(x)) - \cos(nx)$ pour tout x réel. Que vaut $g(x)$ pour $x \in [0, \pi]$? Quelle est la parité de g ? Sa périodicité ? En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
4. Montrer que $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$ sont des polynômes en x, que l'on précisera.

Exercice 11

Résoudre $\arcsin(\tan x) = x$.

Exercice 12

Résoudre $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.

2 Exponentielle et logarithme

Exercice 13

1. Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$
2. En déduire que :

$$\forall n \geq 2, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 14

Calculer pour $\theta \in]0; 2\pi[$ et Résoudre les équations suivantes en déterminant leur domaine de validité :

— $\log_a x = \log_x a \quad$ où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

— $\log_3 x - \log_2 x = 1$

Exercice 15

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x \geqslant 1 + x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\exp(x^2) > (exp(x))^4 \times e$.

Exercice 16

Calculer les limites suivantes :

— $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

— $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

— $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$

— $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln x$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{x^2}$

— $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}}$

Exercice 17

On définit sur $[1, +\infty[$ une fonction f par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Étudier complètement la fonction f, et tracer une allure de sa courbe représentative.
2. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) tels que $2 \leqslant a < b$ et $a^b = b^a$.
3. Entre e^π et π^e, quel est le nombre le plus grand ?

Exercice 18

On souhaite étudier la fonction définie par $f(x) = x^{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

1. Préciser les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Déterminer le signe de $g : x \mapsto x\ln(x) + x + 1$
3. Donner le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer si la fonction f admet une asymptote en $+\infty$.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

3 Fonctions hyperboliques

Exercice 19

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cosh(a + kb) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sinh(a + kb).$$

Exercice 20

Montrer que

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \operatorname{sh} x \geqslant x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$

Exercice 21

Démontrer les formules d'addition suivantes pour les fonctions hyperboliques (valables pour tout réel x) :
-$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$
-$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$
-$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x)+\operatorname{th}(y)}{1+\operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$

Exercice 22

Montrer que $\forall x \neq 0$,

$$\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

Calculer alors la somme

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}\left(2^k x\right)$$

Exercice 23

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$5\operatorname{ch} x - 4\operatorname{sh} x = 3$$

Exercice 24

Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$ sur un domaine à déterminer. Conclusion ?

Exercice 25

Par une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\arctan(\tanh x) = \arctan(\sinh 2x).$$

Exercice 26

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sinh(1/x)$.

1. Étudier la parité de f.

2. Étudier le comportement de f en $\pm\infty$, en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
4. Justifier que pour tout $y \geq 0$, $\tanh(y) \leq y$. En déduire le tableau de variations de f, puis tracer la courbe représentative de f.

Exercice 27

1. Donner le tableau de variations de la fonction Arcsinh ainsi qu'une allure de sa courbe (on rappellera l'allure de la courbe de sh dans le même repère).
2. Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = y$ (on exprimer a l'unique solution de cette équation en fonction de y, en utilisant une méthode très similaire à celle de la question précédente).
4. En déduire une expression explicite de la fonction Arcsinh.
5. À l'aide de l'expression précédente, calculer la dérivée Arcsinh' de la fonction Arcsinh.
6. Vérifier que cette dérivée est cohérente avec la formule de dérivée de la réciproque vue en cours (on aura sûrement besoin à un moment ou à un autre de la formule classique $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$, valable pour tout réel x).

Exercice 28

Simplifier, quand là où elles sont définies, les expressions suivantes :

1. $\operatorname{ch}(\operatorname{arcsinh} x)$
2. $\operatorname{sh}(2 \operatorname{arcsinh} x)$
3. $\operatorname{th}(\operatorname{arcsinh} x)$
4. $\operatorname{sh}(\operatorname{arccosh} x)$