

1. Propositions logiques

1.1 Assertion

Définition 1 .

On appelle **assertion** toute phrase mathématique dont on peut dire si elle vraie (V) ou fausse (F).

Exemple 1 .

- $P = \ll 3 > 2 \gg$ est une assertion vraie.
- $Q = \ll 2 + 2 = 5 \gg$ est une assertion fausse.
- $R = \ll \text{Salut!} \gg$ n'est pas une assertion.

Définition 2 .

Pour distinguer les différents résultats que nous démontrons, nous leur donnons les noms de :

- **proposition** pour la plupart des résultats,
- **théorème** pour les résultats les plus fondamentaux,
- **corollaire** pour les conséquences immédiates de résultats précédents,
- **lemme** pour certains résultats préliminaires, utiles pour la suite, mais dont l'intérêt intrinsèque est assez limité.

Remarque 1 .

Lorsque la valeur de vérité d'une assertion P dépend des valeurs prises par un paramètre x on note souvent celle-ci $P(x)$ pour le signaler.

Exemple 2 .

- $P(x) = \ll x > 0 \gg$ est une assertion dépendant d'un paramètre x réel.
- $P(2)$
- $P(-2)$

1.2 Négation

Définition 3 .

On appelle **négation** d'une assertion P l'assertion, notée $\text{non}(P)$ ou $\bar{P}$, définie comme étant vraie lorsque P est fausse et inversement.

On peut aussi dire que l'assertion $\text{non}(P)$ est définie par la table de vérité :

P	$\text{non}(P)$

Exemple 3 .

- Si x est un réel, alors La négation de « $x \geq 0$ » est
- Si x et y sont deux réels, alors La négation de « $x = y$ » est

1.3 Conjonction et disjonction

Définition 4 .

Soient P et Q deux assertions.

- On appelle **conjonction** de P et Q l'assertion notée « P et Q » définie comme étant vraie lorsque P et Q le sont toutes les deux.
- On appelle **disjonction** de P et Q l'assertion notée « P ou Q » définie comme étant vraie lorsqu'au moins l'une des deux l'est.

On a donc :

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Exemple 4 .

Soit x un réel. « $0 < x < 1$ » est la conjonction de

Remarque 2 .

Si « P ou Q » est vraie et Q est fausse alors nécessairement P est vraie.

Remarque 3 .

Si « P ou Q » est vraie et Q est fausse alors nécessairement P est vraie.

1.4 Implications

Définition 5 .

Soient P et Q deux assertions.

On définit l'assertion $P \Rightarrow Q$, qu'on lit « P implique Q » comme étant « $(\text{non } P) \text{ ou } Q$ ». On a donc :

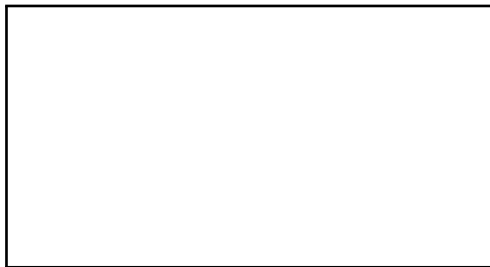
P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Remarque 4 .

- ▶ Si P est fausse, alors « $P \Rightarrow Q$ » est toujours vraie.
- ▶ Si P est vrai, alors « $P \Rightarrow Q$ » n'est vraie que lorsque Q est vraie.
- ▶ Ainsi, pour montrer que « $P \Rightarrow Q$ » est vraie il suffit de montrer que Q est vraie dans le cas où P est vraie, ce qui revient à **supposer que P est vraie et de montrer sous cette hypothèse que Q est vraie.**

Rédaction

Quand on veut montrer que « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, on procède souvent ainsi :



ou bien on procède par des implications successives :

$$P \Rightarrow P_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_n \Rightarrow Q$$

Remarque 5 .

L'implication $P \Rightarrow Q$ peut s'exprimer par :

- ▶ Si P , alors Q .
- ▶ Pour que P il faut que Q .
- ▶ Q est une **condition nécessaire** (CN) pour P .
- ▶ Pour que Q il suffit que P .
- ▶ P est une **condition suffisante** (CS) pour Q .

Remarque 6 .

- ▶ Ne jamais utiliser $\Rightarrow$ comme abréviation d'un "Donc".

Exemple 5 .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \geq 3 \Rightarrow x^2 - 2x \geq 3$.

   **Solution**

Exemple 6 .

Compléter les phrases suivantes par « il suffit que » ou « il faut que », puis écrire ces phrases à l'aide d'implications.

1. On suppose que $a \leq 1$. Pour que $b \leq 1$ $b \leq a$.
2. Pour que $|x| \leq 1$ $x \leq 1$.

3. Pour que $|x| \geq 1$ $x \leq -2$.
4. Pour que $x = 0$ $\sqrt{x+1} = 1$.

   **Solution**

1.5 Équivalence

Définition 6 .

Soient P et Q deux assertions.

L'assertion $P \iff Q$, qu'on lit « P et Q sont équivalentes », est définie comme étant vraie si P et Q ont la même valeur de vérité et fausse sinon. On a donc :

P	Q	$P \iff Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Remarque 7 .

L'équivalence $P \iff Q$, peut s'exprimer par :

- ▶ P si et seulement si Q.
- ▶ Pour que P il faut et il suffit que Q.
- ▶ P est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour Q.

Proposition 1 .

- (a) $(P \iff Q)$ et $(P \implies Q \text{ et } Q \implies P)$ sont équivalentes.
- (b) $(P \iff Q)$ et $(\text{non}(P) \iff \text{non}(Q))$ sont équivalentes.

Démonstration

P	Q	$P \iff Q$	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \implies Q \text{ et } Q \implies P$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

P	Q	$P \iff Q$	$\text{non}(P)$	$\text{non}(Q)$	$\text{non}(P) \iff \text{non}(Q)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Remarque 8 .

Pour montrer que l'équivalence $P \iff Q$ est vraie, on a au moins deux méthodes :

- ▶ Procéder par des équivalences successives :

$$P \iff P_1 \iff \dots \iff P_n \iff Q$$

- ▶ Montrer $P \implies Q$, puis $Q \implies P$.

Proposition 2 .

- (a) $\text{non}(\text{non}(P)) \iff P$.
- (b) $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q))$.
- (c) $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q))$.
- (d) $\text{non}((P \implies Q)) \iff (P \text{ et } \text{non}(Q))$.

Exemple 7 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (de deux manières) l'équation $2x = \sqrt{x^2 + 1}$.

  **Solution**

2. Quantificateurs

Soient E un ensemble et $P(x)$ une assertion dépendante d'un élément $x \in E$.

2.1 Définitions

Définition 7 .

On définit l'assertion $\ll \forall x \in E, P(x) \gg$ comme étant vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tout x dans E . Cette assertion se lit : $\ll \text{Quel que soit dans } E \text{ on a } P(x) \gg$.

Exemple 8 .

- $\ll \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \gg$
- $\ll \forall x \in [-1, 1], x^2 \leq 1 \gg$
- $\ll \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 1 \gg$

Définition 8 .

- On définit l'assertion $\ll \exists x \in E, P(x) \gg$ comme étant vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un x dans E .
Cette assertion se lit : $\ll \text{Il existe } x \text{ dans } E \text{ tel que } P(x) \gg$.
- On définit l'assertion $\ll \exists! x \in E, P(x) \gg$ comme étant vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour un et un seul x dans E .
Cette assertion se lit : $\ll \text{Il existe un unique } x \text{ dans } E \text{ tel que } P(x) \gg$.

Exemple 9 .

- $\ll \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \gg$
- $\ll \exists x \in [2, 3], x^2 = 1 \gg$

Remarque 9 .

(i) Quand on veut montrer : « $\forall x \in E, P(x)$ », on écrit sans réfléchir :

(ii) Quand on veut montrer : « $\exists x \in E, P(x)$ », on écrit sans réfléchir :

(iii) La lettre affectée par un quantificateur est muette; elle peut être remplacée par n'importe quelle lettre :

$$(\forall x \in E, P(x)) \iff (\forall y \in E, P(y))$$

$$(\exists x \in E, P(x)) \iff (\exists y \in E, P(y))$$

Exemple 10 .

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.

   **Solution**

Exemple 11 .

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, z > x$.

   **Solution**

Remarque 10 .

Attention! Les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas des abréviations et ne doivent jamais être employés au coeur d'une phrase en français pour dire «pour tout» ou «il existe». Par exemple, on n'écrit pas « $\exists$ un réel x dont le carré est supérieur à 1».

2.2 Négation

Proposition 3 .

- $\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E, \text{non}(P(x)))$
- $\text{non}(\exists x \in E, P(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non}(P(x)))$

Exemple 12 .

La négation de l'assertion

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \left(|x| < \alpha \implies \left| \frac{x}{1+x^2} \right| < \varepsilon \right)$$

est

Exemple 13 .

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. La négation de « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ » est-elle « la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ »?

2.3 Permutation des quantificateurs

On peut toujours permuter les quantificateurs universels $\forall$ entre eux, et les quantificateurs existentiels $\exists$ entre eux.

Exemple 14 .

- ▶ $(\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_-, x \geq y) \iff (\forall y \in \mathbb{R}_-, \forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq y).$
- ▶ $(\exists x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_-, x \geq y) \iff (\exists y \in \mathbb{R}_-, \exists x \in \mathbb{R}_+, x \geq y).$

Remarque 11 .

La permutation d'un $\forall$ et d'un $\exists$ n'est pas aussi facile. Par exemple l'assertion « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, z > x$ » est vraie, mais l'assertion « $\exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, z > x$ » est fausse.

3. Raisonnements

3.1 Raisonnement par déduction

Principe

- ◆ Si P est vraie et l'implication $P \implies Q$ est vraie, alors Q est vraie.
- ◆ Ainsi, pour montrer que Q est vraie, il suffit de montrer que P est vraie et que l'implication $P \implies Q$ est vraie : **c'est le raisonnement par déduction.**
- ◆ En pratique, un raisonnement par déduction contiendra des mots comme « **donc** », « **ainsi** », etc.

Exemple 15 .

Prouver que pour tout $x \in [0, 1]$: $x - x^2 \in \mathbb{N} \implies x \in \{0, 1\}$.

   **Solution**

3.2 Raisonnement par contraposition

Définition 9 .

- $Q \implies P$ est appelée **implication réciproque** de $P \implies Q$.
- $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$ est appelée **contraposée** de l'implication $P \implies Q$.

Proposition 4 .

Les implications $P \implies Q$ et $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$ sont équivalentes. Autrement dit une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Principe

Si on souhaite prouver que $P \implies Q$, il suffit qu'on prouve que $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$: c'est le **raisonnement par contraposition**.

Exemple 16 .

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}$.

   **Solution**

Exemple 17 .

Soit x un réel. Montrer l'implication « $x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q}$ »

3.3 Raisonnement par disjonction des cas

Principe

Le principe du raisonnement par **disjonction des cas** repose sur l'équivalence suivante :

$$Q \iff ((P \implies Q) \text{ et } (\text{non}(P) \implies Q)).$$

Ainsi, pour montrer Q , on peut distinguer deux cas : on montre d'abord que $(P \implies Q)$, puis on montre que $(\text{non}(P) \implies Q)$.

Exemple 18 .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

   **Solution**

Exemple 19 .

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

   **Solution**

3.4 Raisonnement par l'absurde

Principe

Pour montrer qu'une assertion P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on cherche d'en tirer une contradiction.

Exemple 20 .

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

   **Solution**

3.5 Raisonnement par récurrence

Le but du principe de récurrence

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une assertion dépendante d'un entier $n \geq n_0$.

Le but du principe de récurrence est de montrer : $\forall n \geq n_0, P(n)$ est vraie.

Pour arriver à ce but on utilise la **récurrence simple** ou la **récurrence double**.

Théorème 1 (Récurrence simple).

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une assertion dépendante d'un entier $n \geq n_0$.

Si

- ▶ $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**),
- ▶ $\forall n \geq n_0, (P(n) \implies P(n+1))$ est vraie (**hérédité**),

alors : $\forall n \geq n_0, P(n)$ est vraie.

Rédaction

Exemple 21 .

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n$.

   **Solution**

Exemple 22 .

Montrer que pour tout réel x supérieur ou égal à -1 et pour tout entier naturel n , on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

   **Solution**

Théorème 2 (Récurrence double).

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une assertion dépendante d'un entier $n \geq n_0$.

Si

- $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies (initialisation),
- $\forall n \geq n_0, (P(n) \text{ et } P(n + 1)) \implies P(n + 2)$ est vraie (hérédité),

alors : $\forall n \geq n_0, P(n)$ est vraie.

Rédaction

Exemple 23 .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 4, u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 3$.

   **Solution**

3.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Principe

On raisonne par **analyse-synthèse** lorsque l'on cherche la ou les solutions à un problème. Le principe est le suivant :

- On suppose que l'on a une solution du problème et on cherche à en déduire toutes les propriétés possibles de cette solution afin de l'identifier au mieux : **c'est l'étape d'analyse**.
- On détermine parmi tous les objets obtenus lors de l'analyse, ceux qui sont effectivement solutions du problème : **c'est l'étape de synthèse**.

De plus, si la phase d'analyse fournit une expression explicite de l'objet recherché, ne laissant pas le choix pour cet objet, cela fournit même l'unicité.

Exemple 24 .

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

   **Solution**