

Devoir Maison n° 11

Dans ce problème, on étudie quelques propriétés des parties convexes du plan, et on démontre le théorème de projection sur un convexe fermé ; un théorème fondamental en analyse et en optimisation.

1 Préliminaires

Définition 1 : Ensemble convexe. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$. On dit que C est *convexe* si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], (1 - t)x + ty \in C.$$

1. Montrer que $[0, 1] \times [0, 1]$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Le cercle unité $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est-il convexe ?
3. Soient A et B deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^2$ et $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Démontrer que $A + B$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.
4. Donner un exemple de deux convexes de $\mathbb{R}^2$ dont l'union n'est pas convexe.
5. Soit I un ensemble non vide et $(C_i)_{i \in I}$ une famille de convexes de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\bigcap_{i \in I} C_i$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite, $\mathbb{R}^2$ serait muni de son produit scalaire usuel :

$$\forall ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

nous noterons $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, i.e. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

2 Sur les suites

Soient $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

6. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(x_n, y_n) - (x, y)\| = 0$.

Définition 2 : Convergence d'une suite de $\mathbb{R}^2$, suite de Cauchy. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge dans $\mathbb{R}^2$ vers (x, y)* si l'une des deux conditions équivalentes précédentes est satisfaite. On note alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$

- On dit que la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (n, p \geq N) \implies \|(x_n, y_n) - (x_p, y_p)\| \leq \varepsilon.$$

On admet le résultat suivant :

$\mathbb{R}^2$ est complet : Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$. Alors, $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^2$.

3 Projection sur un convexe fermé

3.1 Théorème de projection sur un convexe fermé

Définition 3 : Partie fermée.

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est fermée si :

$$\forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \forall z \in \mathbb{R}^2, ((z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } z) \implies (z \in A).$$

Définition 4 : Distance d'un point à une partie

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et x un réel quelconque. On appelle distance de x à A et on note $\text{dist}(x, A)$ la quantité définie par :

$$\text{dist}(x, A) = \inf_{w \in A} \|w - x\|$$

On souhaite montrer le résultat suivant :

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ **un ensemble convexe fermé non vide**. Pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $z' \in C$ tel que

$$\|z - z'\| = \text{dist}(z, C).$$

Cet unique élément est appelé la **projection** de z sur C .

Soient $z \in \mathbb{R}^2$ et $d = \text{dist}(z, C)$. On souhaite prouver en premier lieu l'existence de la projection de z sur C .

7. Justifier déjà l'existence de d .

8. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists z_n \in C, \quad \|z - z_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

On a ainsi une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de C telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|z - z_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$

9. Montrer l'identité du parallélogramme :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

En donner une interprétation géométrique à l'aide d'une figure et une petite explication.

10. En déduire que

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \|z_n - z_p\|^2 \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{p}.$$

11. Conclure.

12. Prouver l'unicité de la projection de z sur C .

Pour ceci, on peut supposer qu'il existe z_1 et z_2 dans C tels que $\|z - z_1\| = \|z - z_2\| = d$, et prouver que $z_1 = z_2$ à l'aide de l'identité du parallélogramme.

13. Donner un exemple d'une partie C de $\mathbb{R}^2$, non vide et non convexe, ainsi qu'un point z de $\mathbb{R}^2$, tels que la projection de z sur C ne soit pas unique, ou autrement dit, l'ensemble des points minimisant la distance entre z et C ne soit pas réduit à un singleton.

(Une figure accompagnée d'une petite explication est largement suffisante.)

Dans la suite, nous noterons $p_C(z)$ la projection de z sur le convexe C .

3.2 Une caractérisation

Nous souhaitons prouver le résultat suivant :

Soit C un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ et $z^* \in C$, on a :

$$z^* = p_C(z) \iff (\forall y \in C, \langle z^* - z, z^* - y \rangle \leq 0). \quad (3.2)$$

Soit $z \in \mathbb{R}^2$.

14. **Sens direct.** Soit $p_C(z)$ la projection de z sur C .

(a) Montrer que : pour tout $y \in C$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\|z - (ty + (1 - t)p_C(z))\|^2 \geq \|z - p_C(z)\|^2.$$

(b) En déduire que

$$\forall y \in C, \quad \langle p_C(z) - z, p_C(z) - y \rangle \leq 0.$$

15. **Sens indirect.** Soit z^* vérifiant l'inégalité de droite de la ligne (3.2).

(a) Montrer que : pour tout $y \in C$,

$$\|y - z\|^2 = \|y - z^*\|^2 + \|z^* - z\|^2 - 2\langle z^* - z, z^* - y \rangle.$$

(b) En déduire que $z^* = p_C(z)$.

16. Montrer que l'application p_C est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$, i.e. montrer que p_C vérifie

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Fin de l'énoncé

4 Corrigé

- Simple application de la définition.
- Non. En effet, prenons $(1, 0)$ et $(0, 1)$ qui sont dans C . Pourtant, pour $\lambda = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}(1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \neq 1$, donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin C$.
- Soient $z_1, z_2 \in A + B$ et $\lambda \in [0, 1]$. Il existe $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$ tels que :

$$z_1 = a_1 + b_1, \quad z_2 = a_2 + b_2$$

Alors :

$$\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = \underbrace{\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2}_{\in A} + \underbrace{\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2}_{\in B} \in A + B$$

car A et B sont convexes. On conclut que $A + B$ est convexe.

- Considérons les deux singletons du plan $\mathbb{R}^2$: $A = \{(0, 0)\}$ et $B = \{(1, 1)\}$. Alors, A et B sont deux convexes du plan, alors que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(0, 0) + \frac{1}{2}(1, 1) \notin A \cup B$. Ainsi, $A \cup B$ n'est pas convexe.
- Soit $(x, y) \in \left(\bigcap_{i \in I} C_i\right)^2$.

Comme pour tout $i \in I$, C_i est convexe, pour tout $t \in [0, 1]$, $(1 - t)x + ty \in C_i$.

Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$, $(1 - t)x + ty \in \bigcap_{i \in I} C_i$.

Par conséquent, $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

- (i) $\implies$ (ii) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - y)^2 = 0$, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(x_n, y_n) - (x, y)\| = 0.$$

- (ii) $\implies$ (i) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \geq |x_n - x|.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(x_n, y_n) - (x, y)\| = 0$, par encadrement, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

Un même argument montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$.

On déduit que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

- L'ensemble $\{\|w - z\| \mid w \in C\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, puisque C ne l'est pas, et minoré par 0 (car une norme est toujours positive), donc admet une borne inférieure $d \geq 0$.
- On utilise la caractérisation de la borne inférieure : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $w \in C$ tel que $d^2 \leq \|w - z\|^2 < d^2 + \varepsilon$.

(*)
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on déduit qu'il existe $z_n \in C$ tel que

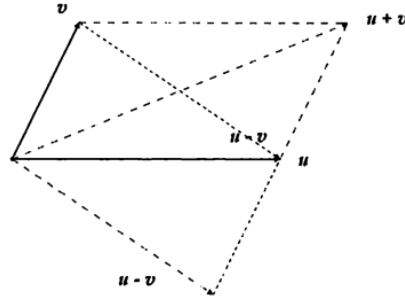
$$d^2 \leq \|z_n - z\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

Dans (*), on a utilisé le résultat suivant : Si A et B sont des parties non vides de $\mathbb{R}^+$, alors $\inf(AB) = \inf(A)\inf(B)$.

- Soit $(u, v) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$. En développant le carré des normes, on a

$$\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \boxed{2(\|u\|^2 + \|v\|^2)}.$$

Ce résultat signifie que la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses quatre côtés.

FIGURE 1 – Illustration de l'identité du parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$

10. Soient $n, p \geq 1$. Appliquons l'identité du parallélogramme à $u = z - z_n$ et $v = z - z_p$; on obtient :

$$4 \left\| z - \frac{z_n + z_p}{2} \right\|^2 + \|z_n - z_p\|^2 = 2 (\|z - z_n\|^2 + \|z - z_p\|^2).$$

Mais, C étant *convexe*, on a $\frac{z_n + z_p}{2} \in C$; donc :

$$\left\| z - \frac{z_n + z_p}{2} \right\| \geq d,$$

de sorte que l'on obtient :

$$\|z_n - z_p\|^2 \leq 2 \left(d^2 + \frac{1}{n} + d^2 + \frac{1}{p} \right) - 4d^2 = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right).$$

11. De la question 10, on déduit que la suite (z_n) est une suite de Cauchy. Comme $\mathbb{R}^2$ est complet, elle converge donc vers un élément $y \in \mathbb{R}^2$. Mais comme C est fermé, on a en fait, puisque les z_n sont dans C , $y \in C$.
De plus, le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d^2 \leq \|z_n - z\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$ entraîne, en passant à la limite, que $d \leq \|z - y\| \leq d$.
On a donc $\|z - y\| = d$, d'où l'existence de "la" projection de z sur C .
12. Soient $y_1, y_2 \in C$ tels que $\|z - y_1\| = \|z - y_2\| = d$. Comme ci-dessus, en appliquant l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} 4d^2 + \|y_1 - y_2\|^2 &\leq 4 \left\| z - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 \\ &= 2 (\|z - y_1\|^2 + \|z - y_2\|^2) \\ &= 2(d^2 + d^2) \\ &= 4d^2 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$$

ce qui implique que $y_1 = y_2$.

13. Il suffit de considérer C le cercle unité et son centre O . Alors la distance entre O et C est atteinte en tout point de C .
14. (a) Soient $y \in C$ et $t \in [0, 1]$.
Comme $p_C(z) \in C$ et par convexité de C , on a

$$ty + (1 - t)p_C(z) \in C.$$

Par définition de $p_C(z)$, on a

$$\|z - (ty + (1 - t)p_C(z))\|^2 \geq \|z - p_C(z)\|^2.$$

(b) Soit $y \in C$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \|z - (ty + (1-t)p_C(z))\|^2 &= \|z - p_C(z) + t(p_C(z) - y)\|^2 \\ &= \|z - p_C(z)\|^2 + t^2\|p_C(z) - y\|^2 + 2t\langle z - p_C(z), p_C(z) - y \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité établie à la question 14 (a) est équivalente à : pour tout $t \in [0, 1]$,

$$2t\langle z - p_C(z), p_C(z) - y \rangle + t^2\|p_C(z) - y\|^2 \geq 0.$$

En supposant $t > 0$, on divise par t et on le tend vers 0, ainsi on obtient

$$\boxed{\langle p_C(z) - z, p_C(z) - y \rangle \leq 0.}$$

15. (a) Soit $y \in C$. On remarque que

$$\|y - z\|^2 = \|(y - z^*) + (z^* - z)\|^2.$$

En développant le carré de la norme, on obtient

$$\begin{aligned} \|y - z\|^2 &= \|y - z^*\|^2 + 2\langle y - z^*, z^* - z \rangle + \|z^* - z\|^2 \\ &= \|y - z^*\|^2 - 2\langle z^* - y, z^* - z \rangle + \|z^* - z\|^2. \end{aligned}$$

(b) Par hypothèse sur z^* , on a

$$-\langle z^* - y, z^* - z \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \|y - z^*\|^2 \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\forall y \in C, \quad \|y - z\| \geq \|z - z^*\|.$$

On a montré que z^* vérifie

$$\|z - z^*\| = \inf_{y \in C} \|y - z\|,$$

donc

$$z^* = p_C(z).$$

16. Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$. Remarquons d'abord que l'inégalité est triviale si $p_C(x) = p_C(y)$. Supposons alors que ce n'est pas le cas. Comme $p_C(x) \in C$ et $p_C(y) \in C$, en utilisant l'inégalité établie à la question 14 on obtient

$$\langle p_C(x) - x, p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq 0 \quad (*)$$

et

$$\langle p_C(y) - y, p_C(y) - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \text{Soit} \quad \langle -p_C(y) + y, p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq 0 \quad (**).$$

En sommant (*) et (**), on a

$$\langle p_C(x) - p_C(y) + y - x, p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq 0,$$

soit

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \leq \langle p_C(x) - p_C(y), x - y \rangle.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient finalement

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \leq \|p_C(x) - p_C(y)\| \|x - y\|.$$

En simplifiant par $\|p_C(x) - p_C(y)\|$ (qui est non nul par hypothèse), on a bien

$$\|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Fin du corrigé