

Suites monotones

Théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Cas des suites croissantes

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors on a les deux cas suivants :

- ① ou bien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée ; dans ce cas elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ donnée par $\ell = \sup_{\mathbb{R}} \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- ② ou bien elle est non majorée, et dans ce cas, elle tend vers $+\infty$.

Remarque

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers un réel ℓ , alors $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \leq \ell$

Corollaire : Cas des suites décroissantes

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors on a les deux cas suivants :

- ① ou bien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée ; dans ce cas elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ donnée par $\ell = \inf_{\mathbb{R}} \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- ② ou bien elle est non minorée, et dans ce cas, elle tend vers $-\infty$.

Remarque

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers un réel ℓ , alors $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \geq \ell$

- Étudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

- Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$.

Définition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si l'une de ces suites est croissante, l'autre décroissante et si $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Suites adjacentes

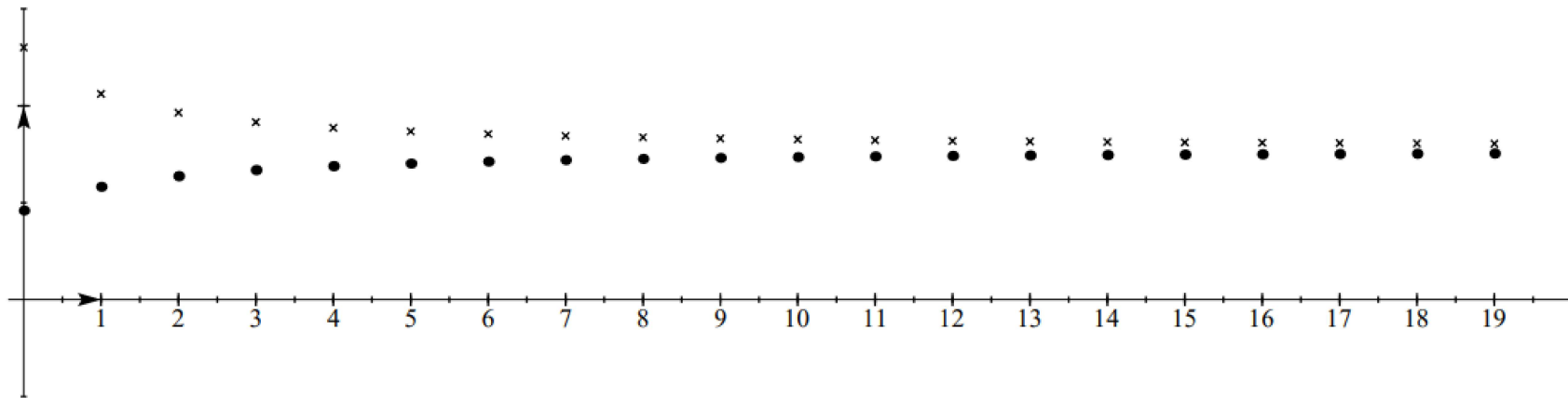


Figure 3 – suites adjacentes

Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite. De plus, si on suppose que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$.

Application 1

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

- ① Montrer que ces suites convergent vers une même limite, notée e .
- ② Montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.
- ③ Écrire une fonction python qui renvoie un encadrement de e avec une amplitude inférieure à une erreur donnée.

Application 1

```
#fonction récursive pour définir la factorielle :

def factorielle(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n*factorielle(n-1)

#fonction qui prend comme paramètre l'erreur souhaitée et retourne un encadrement de e
#avec une amplitude inférieure ou égale à cette erreur:

def approximation(erreur):
    n=0 #on initialise avec 0
    u=1 #premier terme de la suite (u_n)
    v=2 #premier terme de la suite (v_n)
    while ((v-u)>erreur) :
        n+=1
        u=u+(1/factorielle(n)) # définition du terme général de la suite (u_n)
        v=v+(1/factorielle(n)) # définition du terme général de la suite (v_n)

    return u,v

erreur = 10**(-3)

print("Un encadrement de e est:", approximation(erreur))
```

Figure 4 – Proposition de code pour répondre à la question 3.

Application 1

```
In [22]: runfile('D:/python prepa/approximation de e.py', wdir='D:/python prepa')
Un encadrement de e est: (2.7182539682539684, 2.7184523809523813)

In [23]:
```

Figure 5 – Résultat d'exécution.

Application 2

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

Prouver que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

En particulier, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\gamma \approx 0,577$ qu'on appelle **la constante d'Euler**.

Fonction d'extraction, suite extraite, valeur d'adhérence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Fonction d'extraction : On appelle fonction d'extraction (ou extractrice) toute fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- Suite extraite : On appelle suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ dans laquelle φ est une fonction d'extraction.
- Valeur d'adhérence : On appelle valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute limite finie d'une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition

Soit (u_n) une suite réelle. Une suite extraite d'une sous-suite de (u_n) est une suite extraite de (u_n)

Exercice

- ① Prouver que $(\cos(\frac{\pi}{2}(4n + 1)))$ est une suite extraite de $(\cos(\frac{\pi}{2}n))$.
- ② Démontrer que 1 est une valeur d'adhérence de la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ③ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Justifier que :
La suite $(u_{3 \times 2^{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3 \times 2^n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme

Soit φ une fonction d'extraction. Pour tout $n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \geq n$.

Limites de suites extraites

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite, ses suites extraites admettent aussi toutes ℓ pour limite.

En particulier, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, sa limite est sa seule valeur d'adhérence.

Application

En utilisant ce qui précède, prouver que la série harmonique diverge.

Corollaire : Critère de divergence d'une suite

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, ϕ, κ deux fonctions extractrices telles que :

- ① $u_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$
- ② $u_{\kappa(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell' \in \mathbb{R}$
- ③ $\ell \neq \ell'$

alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, et donc elle diverge.

Critère de divergence d'une suite

Exemple

- ① La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge car $\lim u_{2n} = 1$, $\lim u_{2n+1} = -1$ et $1 \neq -1$.
- ② La suite de terme général $u_n = \frac{n}{9} - \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$ n'admet pas de limite.

Critère de convergence d'une suite

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que :

$$\textcircled{1} \quad u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

$$\textcircled{2} \quad u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Preuve : Principe de la démonstration par dichotomie

Donnons-nous une suite réelle (u_n) bornée.

Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$: " $\exists a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et $\phi(0), \dots, \phi(n) \in \mathbb{N}$ tels que :

- ① $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_0$ et $a_0 \leq b_0$.
- ② $\forall k \in [[0, n]], b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$,
- ③ $\phi(0) < \dots < \phi(n)$.
- ④ $\forall k \in [[0, n]], a_k \leq u_{\phi(k)} \leq b_k$,
- ⑤ $\forall k \in [[0, n]], \{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [a_k, b_k]\}$ est infini."

On va prouver par récurrence que pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie en utilisant le principe de la dichotomie, ce qui va nous permettre de construire deux suites (a_n) et (b_n) adjacentes et une extractrice ϕ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n$, et il ne restera plus que conclure.

Preuve : Principe de la démonstration par dichotomie

Donnons-nous une suite réelle (u_n) bornée.

Étape 1 : (Initialisation) Puisque (u_n) est bornée, alors il existe $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq u_n \leq b_0$, posons $\phi(0) = 0$, on a clairement $P(0)$

Étape 2 : étape intermédiaire pour comprendre le processus de construction

Posons :

$$G_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]\}, \quad D_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]\}.$$

Puisque $G_1 \cup D_1 = \mathbb{N}$, l'un de ces deux ensembles est infini.

Preuve : Principe de la démonstration par dichotomie

- Si G_1 est infini, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.
- Si D_1 est infini, on pose $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.

En tout cas, l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}^*, u_i \in [a_1, b_1]\}$ est infini, en particulier c'est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément, notons-le $\phi(1)$.

Conclusion : On a construit $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}, \phi(0), \phi(1) \in \mathbb{N}$ tels que :

- 1 $a_0 \leq a_1, b_1 \leq b_0$ et $a_0 \leq b_0$.
- 2 $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2^1}$
- 3 $\phi(0) < \phi(1)$
- 4 $\forall k \in [[0, 1]], a_k \leq u_{\phi(k)} \leq b_k$
- 5 $\forall k \in [[0, 1]], \{i \in \mathbb{N}, u_i \in [a_k, b_k]\}$ est infini.

Preuve : Principe de la démonstration par dichotomie

Étape 3 : (Hérédité) soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$, i.e, on suppose avoir construit $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et $\phi(0), \dots, \phi(n) \in \mathbb{N}$ tels que :

① $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_0$ et $a_0 \leq b_0$,

② pour tout $k \in [[0, n]]$, $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$,

③ $\phi(0) < \phi(1) < \dots < \phi(n)$.

④ $\forall k \in [[0, n]], a_k \leq u_{\phi(k)} \leq b_k$,

⑤ $\forall k \in [[0, n]], \{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [a_k, b_k]\}$ est infini ,

et Montrons $P(n+1)$

Preuve : Principe de la démonstration par dichotomie

$$\text{Posons } G_{n+1} = \left\{ i \in \mathbb{N} \mid u_i \in \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right] \right\},$$

$$D_{n+1} = \left\{ i \in \mathbb{N} \mid u_i \in \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right] \right\}$$

Remarquons tout d'abord que l'un au moins des ensembles est infini, car si les deux étaient finis, leur réunion $\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [a_n, b_n]\}$ le serait aussi et cela contredirait (5).

① Si G_{n+1} est infini, on prend $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

② Si D_{n+1} est infini, on prend $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$

En tout cas, l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ est infini, donc il en est de même pour l'ensemble $\{i > \phi(n) \mid u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$, qui est en particulier une partie non vide de $\mathbb{N}$, admettant donc un plus petit élément qu'on note $\phi(n+1)$.

Preuve : Principe de la démonstration par dichotomie

Conclusion 1 :

- ① vu que $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ et $a_0 \leq b_0$, on déduit que $a_n \leq b_n$ et par conséquent, $a_n \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$, soit $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$.
- ② Dans les deux cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$
- ③ par construction, $\phi(n) < \phi(n+1)$
- ④ $a_{n+1} \leq u_{\phi(n+1)} \leq b_{n+1}$
- ⑤ $\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ est infini.

Preuve : Principe de la démonstration par dichotomie

Conclusion 2 :

- ① $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_0$ et $a_0 \leq b_0$,
- ② pour tout $k \in [[0, n+1]]$, $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$,
- ③ $\phi(0) < \phi(1) < \dots < \phi(n) < \phi(n+1)$.
- ④ $\forall k \in [[0, n+1]]$, $a_k \leq u_{\phi(k)} \leq b_k$,
- ⑤ $\forall k \in [[0, n+1]]$, $\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in [a_k, b_k]\}$ est infini

D'où, $P(n+1)$.

ainsi, on a construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) , la première étant croissante, la deuxième décroissante, et telles que $\lim b_n - a_n = 0$, par le théorème des suites adjacentes, on déduit qu'elles convergent vers un réel ℓ .

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n$, ce qui implique que $\lim u_{\phi(n)} = \ell$.

Suites de Cauchy

Une suite réelle $(x_n)_{n \geq 0}$ est dite **suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \geq N \text{ et } q \geq N \implies |x_p - x_q| \leq \varepsilon.$$

- ① Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.
- ② En déduire que toute suite de Cauchy est convergente

Relations de comparaison sur les suites

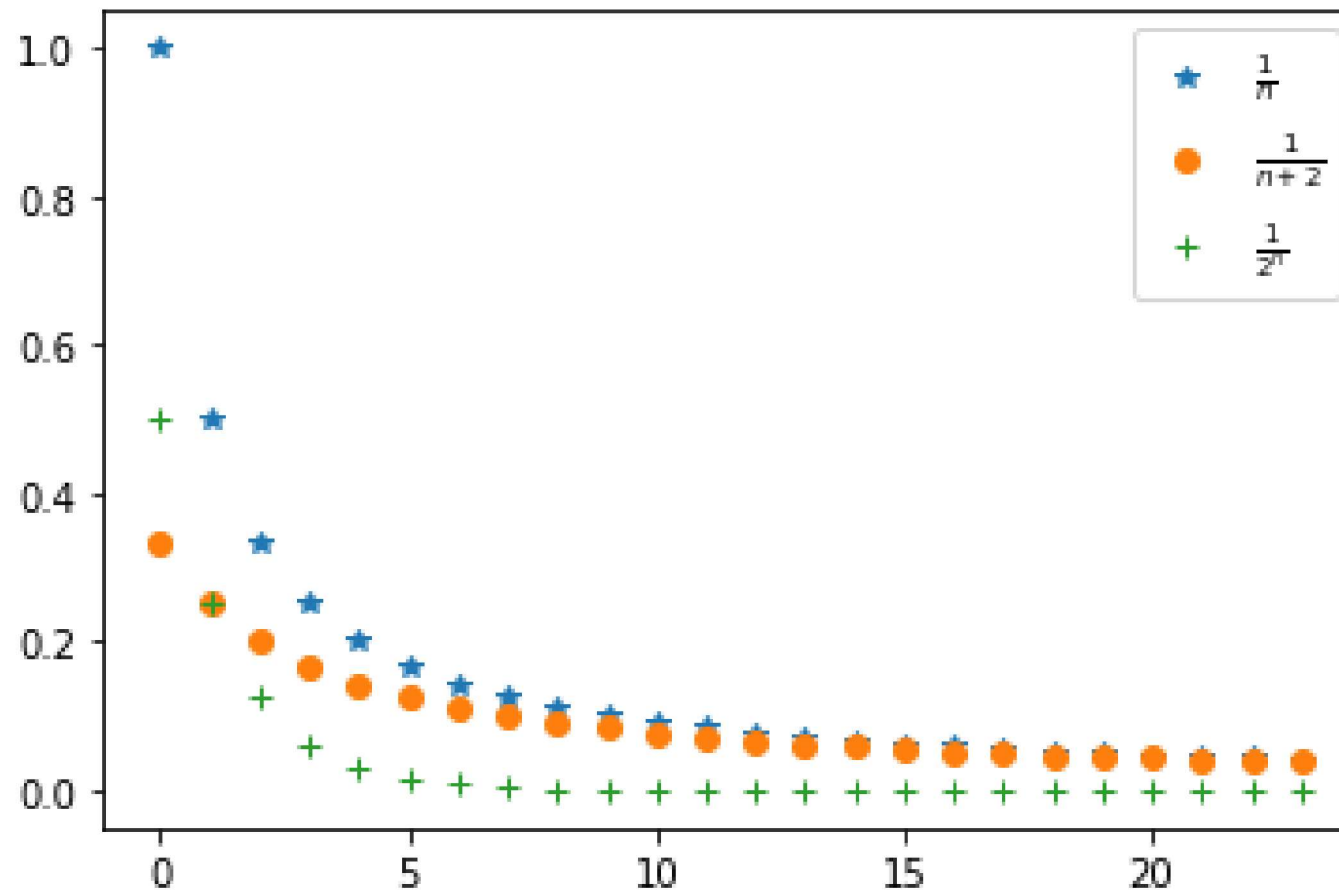


Figure 6 – Comparaison de quelques suites convergentes.

Définition : Négligeabilité

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement s'il existe une suite (ε_n) et un rang N tels que :

$$① \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$② \quad \forall n \geq N, \quad u_n = \varepsilon_n v_n.$$

On note alors : $u_n = o(v_n)$ ou bien $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

Ou de façon équivalente, (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si : $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n > n_0, |u_n| \leq \epsilon |v_n|$.

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

Si, à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas, alors :

$$u_n = o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque

Il faut faire attention avec le symbole " $= o$ ", ce n'est pas le symbole d'égalité d'expressions algébriques.

Ainsi, si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$, il n'y a aucune raison de conclure que $(u_n) = (w_n)$.

Exemples

- ① $\ln(n) = o(n)$
- ② $2^n = o(n!)$
- ③ $\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ou encore $\exp\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- ④ $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$. (Développement asymptotique de la série harmonique) où γ désigne la constante d'Euler définie dans la page 48.
- ⑤ Une suite (u_n) est de limite nulle si et seulement si $u_n = o(1)$
- ⑥ Une suite (u_n) a une limite finie ℓ si et seulement si $u_n = \ell + o(1)$

Manipulation du petit o

Soient $(a_n), (b_n), (u_n), (v_n)$ des suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$a_n = o(u_n) \Rightarrow \lambda a_n = o(u_n)$$

$$a_n = o(u_n) \text{ et } b_n = o(v_n) \Rightarrow a_n b_n = o(u_n v_n)$$

$$a_n = o(u_n) \Rightarrow a_n v_n = o(u_n v_n)$$

$$a_n = o(u_n) \text{ et } b_n = o(u_n) \Rightarrow a_n + b_n = o(u_n)$$

$$a_n = o(u_n) \text{ et } u_n = o(v_n) \Rightarrow a_n = o(v_n)$$

Exemples

- Partant de $\exp(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, on déduit que $5\exp(\frac{1}{n}) = 5 + \frac{5}{n} + o(\frac{1}{n})$
- Sachant que $\exp(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$ et $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, on aboutit à $\exp(\frac{1}{n}) \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$
- Vu que $\cos(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ et $\sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, on obtient : $\cos(\frac{1}{n}) \sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
- Puisque $\sin(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ et $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$, on conclut que $\sin(\frac{1}{n^2}) = o(\frac{1}{n})$.

Proposition : Négligeabilité et suites extraites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, ϕ une extractrice.
Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_{\phi(n)} = o(v_{\phi(n)})$.

Exemple

De $3^n = o(n!)$, on tire : $3^{2n} = o((2n)!)$

Théorème : Croissances comparées des suites avec du petit o

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$, et $\beta > 0$.

- $\ln(n)^\beta = o(n^\alpha)$
- $n^\alpha = o(\exp(\beta \cdot n))$
- $n^\alpha = o(a^n)$,
- $a^n = o(n!)$ (valable pour a quelconque dans $\mathbb{R}$)
- $n! = o(n^n)$.
- Si $0 < \alpha < \beta$: $\alpha^n = o(\beta^n)$

Relations de comparaison

Définition : Équivalence

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe un entier naturel N et une suite $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que pour tout $n \geq N$, $u_n = \eta_n v_n$ et $\eta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

On note cette relation $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \sim v_n$.

Remarque

Sous la condition que v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

Équivalence

Exemples

① $n + 1 \sim n$

② $3^n + n^2 \sim 3^n$

③ $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

④ $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ ou encore $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Quelques équivalents usuels

- ① $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
- ② $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$
- ③ $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
- ④ $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
- ⑤ $\sinh\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n};$
- ⑥ $\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim \frac{1}{2n^2};$
- ⑦ $\tanh\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n};$
- ⑧ $\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n};$
- ⑨ $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n};$

Proposition

La relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites. En particulier, pour toute suite (u_n) et (v_n) , on a :

- **Réflexivité** : $u_n \sim u_n$.
- **Symétrie** : Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.
- **Transitivité** : Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Théorème : Équivalence et limites

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.
- Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ avec $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$.

Attention 1

La condition que $\ell \neq 0$ est cruciale, si on part du fait que $\ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on ne peut pas écrire $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim 0$, parce que cela va impliquer tout simplement que $(\ln(1 + \frac{1}{n}))$ est nulle à partir d'un certain rang, ce qui est faux !

Attention 2

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Bien sûr, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même limite, on ne peut conclure directement qu'elles sont équivalentes, pour s'en convaincre, il suffit de considérer les suites (n) et (2^n) .

Équivalence

Proposition : équivalence et signe

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Si (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors elles ont le même signe à partir d'un certain rang.

Corollaire

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Exemple

Une façon de justifier que $(\frac{1}{n})$ et $(\frac{(-1)^n}{n})$ ne sont pas équivalentes est de remarquer que l'une garde un signe constant, l'autre non.

Propriétés : Manipulation des équivalents

Soient $(a_n), (b_n), (u_n), (v_n)$ des suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$a_n = o(u_n) \text{ et } u_n \sim v_n \Rightarrow a_n = o(v_n)$$

$$a_n \sim u_n \text{ et } b_n \sim v_n \Rightarrow a_n b_n \sim u_n v_n$$

$$a_n \sim u_n \text{ et } u_n \neq 0 \text{ apcr} \Rightarrow \frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{u_n}$$

$$a_n \sim u_n \text{ et } u_n > 0 \text{ apcr} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, a_n^\alpha \sim u_n^\alpha$$

Exemples

- ① $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et $n + 1 \sim n$, donc $\ln(1 + \frac{1}{n})(n + 1) \sim 1$
- ② $\sinh(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \neq 0$, ainsi $\frac{1}{\sinh(\frac{1}{n})} \sim n$
- ③ $\arctan(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} > 0$ donc $\sqrt{\arctan(\frac{1}{n^2})} \sim \frac{1}{n}$

Équivalence

Proposition : Obtention d'un équivalent à partir d'un encadrement

Soient $(a_n), (b_n), (u_n)$ des suites réelles.

Si $a_n \sim b_n$ et à partir d'un certain rang $a_n \leq u_n \leq b_n$, alors $u_n \sim a_n \sim b_n$

Exemple

on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$, donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{2n} \leq n \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq 1$, et comme $1 - \frac{1}{2n} \sim 1$, on déduit que $n \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim 1$

Proposition : équivalents et suites extraites

Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites réelles et ϕ une extractrice.
Si $a_n \sim b_n$ alors $a_{\phi(n)} \sim b_{\phi(n)}$

Exercice 1

Soient $(a_n), (b_n), (u_n), (v_n)$ deux suites réelles et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- ① Si $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$, a-t-on $u_n + a_n \sim v_n + b_n$?
- ② Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $f(u_n) \sim f(v_n)$?
- ③ a-t-on $u_n \sim u_{n+1}$?

Équivalence

Exercice 1

- ① $n + 1 \sim n$ et $2 - n \sim -n$ mais $3 \not\sim 0$.
- ② Si $1 + \frac{1}{n} \sim 1$, mais $\ln(1 + \frac{1}{n}) \not\sim 0$, ou encore, $n \sim n + 1$ mais $\exp(n) \not\sim \exp(n + 1)$
- ③ prendre $(\exp(n))$

Conclusion

Dans les équivalents, tout marche bien avec le produit, l'inverse, les puissances ainsi que l'extraction, mais **la composition à gauche et la somme** sont strictement **interdites** !!!

Exercice 2

Trouver un équivalent simple des suites de terme général :

① $u_n = \tan\left(\frac{\sin(\exp(-n))}{\operatorname{sh}\left(\frac{n}{\exp(n) \ln(n)}\right)}\right)$

② $u_n = \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)$

③ $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

④ $u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$

Exercice 3 : Retour sur l'intégrale de Wallis (d'après Mines Ponts)

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. et on rappelle que
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$

- 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

- 2 Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

Intégrale de Wallis

Les correcteurs ont noté une dégradation dans la présentation des copies. Certes, il s'agit d'une épreuve de trois heures et pour terminer le problème il faut être très rapide, on peut donc admettre quelques ratures, mais dans certains cas il est clair que le brouillon, pourtant fourni par le concours, n'a pas été utilisé. Les candidats doivent être conscients que si un correcteur n'arrive pas à lire la réponse à une question, il mettra zéro, on n'attribue pas de points au bénéfice du doute.

Les questions 4 et 6 portaient sur les intégrales de Wallis, thème très classique, aussi peut-on s'étonner de rencontrer des candidats qui n'arrivent même pas à établir la formule de Wallis.

D'autres déterminent l'expression de W_n en fonction de n , qui n'était pas demandée, pour répondre à la question 4. Nous conseillons aux futurs candidats de suivre l'énoncé plutôt que d'utiliser leur mémoire. À la question 5 la décroissance stricte n'était pratiquement jamais bien traitée, l'hypothèse de continuité des fonctions intégrées étant presque toujours oubliée. Rappelons que l'intégration d'une inégalité, même stricte, ne donne qu'une inégalité large.

Figure 7 – Extrait du rapport de la même épreuve.

Formule de Stirling

Proposition : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Formule de Stirling

Proposition : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Preuve : (En exercice)

- ① Montrer (la formule de Wallis) : $\frac{\sqrt{n} (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
- ② Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}\right)$.
 - ① Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - x^2} dx$.
 - ② En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.
- ③ Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ④ On pose $\mu = e^{-\lambda}$. À l'aide de la formule de Wallis, montrer que $\mu = \sqrt{2\pi}$.
- ⑤ En déduire la formule de Stirling.

Définition : Domination

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement s'il existe une suite (B_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :

- ① (B_n) est une suite bornée.
- ② $\forall n \geq N, u_n = B_n v_n$

On note alors : $u_n = O(v_n)$ ou bien $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

Ou de façon équivalente, (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |u_n| \leq M|v_n|$.

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

Si, à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas, alors :

$$u_n = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \text{ est bornée.}$$

Domination

Exemples

- ① $\frac{\sin(n)}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$
- ② $n = O(n^2)$
- ③ Une suite (u_n) est bornée ssi $u_n = O(1)$

Remarque

Il faut faire attention avec le symbole " $= O$ ", ce n'est pas le symbole d'égalité d'expressions algébriques.

Ainsi, si $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(v_n)$, il n'y a aucune raison de conclure que $(u_n) = (w_n)$.

Propriétés du grand O

Soient $(a_n), (b_n), (u_n), (v_n)$ des suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$a_n = o(u_n) \Rightarrow a_n = O(u_n)$$

$$a_n = O(u_n) \Rightarrow \lambda a_n = O(u_n)$$

$$a_n = O(u_n) \text{ et } b_n = O(v_n) \Rightarrow a_n b_n = O(u_n v_n)$$

$$a_n = O(u_n) \Rightarrow a_n v_n = O(u_n v_n)$$

$$a_n = O(u_n) \text{ et } b_n = O(u_n) \Rightarrow a_n + b_n = O(u_n)$$

$$a_n = O(u_n) \text{ et } u_n = O(v_n) \Rightarrow a_n = O(v_n)$$

Exemples

- Puisque $\ln(n) = o(\sqrt{n})$, alors $\ln(n) = O(\sqrt{n})$.
- Partant de $\cos(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^2})$, on déduit que $2\cos(\frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^2})$
- Sachant que $\cos(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^2})$ et $\sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n})$, on aboutit à $\cos(\frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n})$.
- Puisque $\sin(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^2})$ et $\frac{1}{n^2} = O(\frac{1}{n})$, on conclut que $\sin(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n})$.

Définition/Proposition :Suites arithmétiques/géométriques

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $q, r \in \mathbb{R}$.

- **Suite arithmétique** : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$.

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 + nr$, plus généralement ;
pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on a : $u_n = u_m + (n - m)r$.

- **Suite géométrique** : On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = qu_n$.

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = q^n u_0$.

Plus généralement, Si $q \neq 0$, alors :

pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_m q^{n-m}$.

Quelques suites particulières

Définition/Théorème : Suites arithmético-géométriques

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* (de raison a) si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

- Si $a = 1$, auquel cas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique,
- Si $a \neq 1$, l'équation $ax + b = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution ℓ . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de la forme $(\ell + \lambda a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve : (En exercice)

Considérer la suite de terme général $v_n = u_n - \ell$, montrer qu'elle est géométrique et conclure.

Exercice

Trouver le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition

Soient $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^*$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 (de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. (*)$$

L'équation

$$x^2 - ax - b = 0 \tag{1}$$

s'appelle l'équation caractéristique de $(*)$.

Théorème : Cas complexe

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$. On note Δ le discriminant du polynôme $X^2 - aX - b$.

- Cas où $\Delta \neq 0$: Le polynôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 . Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$ sont toutes les suites $(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, λ_1 et λ_2 décrivant $\mathbb{C}$.
- Cas où $\Delta = 0$: Le polynôme $X^2 - aX - b$ possède une seule racine r . Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$ sont toutes les suites $((\lambda n + \mu)r^n)_{n \in \mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{C}$.

Théorème : Cas réel

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On note Δ le discriminant du polynôme $X^2 - aX - b$.

- Cas où $\Delta > 0$: Le polynôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 . Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 réelles de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$ sont toutes les suites $(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, λ_1 et λ_2 décrivant $\mathbb{R}$.
- Cas où $\Delta = 0$: Le polynôme $X^2 - aX - b$ possède une seule racine réelle r . Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 réelles de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$ sont toutes les suites $((\lambda n + \mu)r^n)_{n \in \mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.
- Cas où $\Delta < 0$: Le polynôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines non réelles conjuguées distinctes $\rho e^{\pm i\theta}$. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 réelles de polynôme caractéristique $X^2 - aX - b$ sont toutes les suites $(\rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)))_{n \in \mathbb{N}}$, λ et μ décrivant $\mathbb{R}$.

- ① **Suite de Fibonacci** : Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, ainsi que la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n .
On obtient ainsi **la formule de Binet**.
- ② Soit $\theta \in]0; \pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2 \cos \theta u_{n+1} + u_n = 0$.

Fin du Chapitre