TD : Nombres complexes

1 Propriétés algébriques des nombres complexes

Exercice 1

Soient $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Donner la forme algébrique de z_3.
2. Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2.
3. En déduire le module et un argument de z_3 puis la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

Déterminer la forme algébrique de $z_n = (1 + e^{i\theta})^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Trouver les modules et arguments de

1. $z_1 = 1 + i\tan\theta$ où $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
2. $z_2 = 1 - e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi; \pi\right[$
3. $z_3 = \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi; \pi\right[$
4. $z_4 = (1 + i)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

Soit $j = e^{i2\pi/3}$.

1. Préciser j^3 et, plus généralement, j^n en fonction de $n \in \mathbb{Z}$.
2. Calculer $1 + j + j^2$ et, plus généralement, $1 + j^n + j^{2n}$ en fonction de $n \in \mathbb{Z}$.
3. Que vaut $\bar{j}$ en fonction de j ?

Exercice 5

Inégalité triangulaire généralisée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$
2. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si :
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^+,\ z_k = \lambda_k z_1$$

Exercice 6

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit $a \in \mathbb{C}, |a| < 1$ et $f : \begin{cases} \mathbb{U} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \end{cases}$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
3. Montrer que $f|_{\mathbb{U}}$ est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

2 Trigonométrie

Exercice 8

Soit x un réel.

1. Linéariser $\sin^3(x)$ et $\cos^4(x)$.
2. Exprimer $\cos(5x)$ sous forme d'une expression polynomiale en $\cos(x)$. De même, exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Exercice 9

Calculer pour $\theta \in [0; 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Exercice 10

Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

3 Équations algébriques, racines n-ièmes

Exercice 11

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $Z_1 = 3 + 4i$.
2. $Z_2 = 8 - 6i$.

Exercice 12

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$.
3. $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$.

Exercice 13

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$, où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 14

Déterminer :

1. Les racines troisièmes de $1+i$.
2. Les racines quatrièmes de $-1+i\sqrt{3}$.

Exercice 15

Résoudre l'équation $z^3-z^2+z-1=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Exercice 16

On désigne par ω le complexe $e^{i2\pi/5}$ et on pose :

$$\alpha=\omega+\omega^4 \quad \text{et} \quad \beta=\omega^2+\omega^3.$$

1. Calculer les valeurs de $\alpha+\beta$ et de $\alpha\beta$.
2. En déduire que α et β sont les racines d'un trinôme du second degré que l'on précisera.
3. En déduire $\cos(2\pi/5)$.

Exercice 17

Soient $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ et $\omega=\exp(2i\pi/n)$.

(a) Établir que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k)=\sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell$$

(b) Justifier que l'égalité reste valable pour $z=1$.

(c) En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 18

A-t-on $\mathbb{U}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{U}_n$?

4 Un peu de géométrie

Exercice 19

Identité du parallélogramme

Montrer que :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2,\ |a|^2+|b|^2=\frac{1}{2}\left(|a-b|^2+|a+b|^2\right).$$

Exercice 20

Déterminer de deux manières l'ensemble
A= $\{\ z\in\mathbb{C},\quad |z-1|=|z-i|\}$
et B= $\{\ z\in\mathbb{C},\quad |z-1|=|z+1|\}$

Exercice 21

Déterminer l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tel que $\frac{z-i}{z-1}\in\mathbb{R}$.

Exercice 22

Déterminer tous les complexes z tels que 1, z et z^2+1 soient alignés.

Exercice 23

Déterminer l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels que
$|2iz-1+i|=1$.

Exercice 24

Soient $A(1+i)$ et $B(4+3i)$.

1. Trouver l'affixe du point C pour que le triangle ABC soit équilatéral direct.
2. Trouver l'affixe des points D et E pour que le quadrilatère $ABDE$ soit un carré direct.

Exercice 25

Identifier les transformations complexes suivantes :

1. $f_1: z\mapsto z+1+i$.
2. $f_2: z\mapsto e^{i\pi/6}z$.
3. $f_3: z\mapsto e^{i\pi/3}z+1$.
4. $f_4: z\mapsto 2z+1-i$.
5. $f_7: z\mapsto (1+i)z+i$.
6. $f_8: z\mapsto (1+i\sqrt{3})z+1$.

Exercice 26

Donner l'écriture complexe des transformations suivantes :

1. La translation de vecteur d'affixe $-2+i$.
2. La symétrie de centre i.
3. La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1.
4. L'homothétie de rapport 3 et de centre $1+2i$.
5. La similitude de rapport 2, d'angle $\pi/3$ et de centre $1+i$.

Exercice 27

Étudier la similitude s qui envoie le point A d'affixe i sur le point A$'$ d'affixe $1+\sqrt{3}/2+i/2$ et le point B d'affixe $1+i$ sur le point B$'$ d'affixe $1+3\sqrt{3}+2i$.