

Classe préparatoire TSI1

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

Année scolaire 2023-2024

Programme de mathématiques de la classe préparatoire TSI1

1 Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires technologiques TSI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les élèves à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers d'ingénieur, d'enseignant, de chercheur.

1.1 Objectifs généraux de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Technologie et Sciences Industrielles (TSI) a pour vocation d'apporter aux élèves les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale des scientifiques et des technologues, qu'ils soient ingénieurs, enseignants ou chercheurs ; ce qui leur permet d'acquérir les compétences nécessaires pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe. Cet enseignement développe les aptitudes et les capacités des élèves selon les axes majeurs suivants :

- l'acquisition d'un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes, et la maîtrise de techniques usuelles ;
- le développement simultané du goût du concret et des capacités de raisonnement, d'argumentation et de rigueur ;
- l'éveil de la curiosité intellectuelle et le développement de l'esprit critique et des attitudes de questionnement, de recherche, d'analyse et de synthèse ;
- le développement de l'initiative, de l'autonomie et des capacités d'expression et de communication.

Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations, des connaissances et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent des objectifs majeurs. Les élèves doivent connaître les définitions, les énoncés complets des théorèmes figurant au programme ainsi que les démonstrations exigibles et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes.

Il est attendu que la pratique de la démarche et du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concourt à la formation de l'esprit des élèves et le développement de leurs compétences : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique. Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les élèves à mobiliser, de façon complémentaire

et coordonnée, connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Pour aider les élèves à effectuer la synthèse des connaissances acquises dans les différents domaines qu'ils ont étudié, il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux élèves ; il est aussi souhaitable de mettre en lumière les interactions des champs de connaissance. La concertation entre les enseignants par classe, discipline ou cycle peut y contribuer efficacement ; la cohérence et une organisation coordonnée entre les diverses disciplines est fondamentale. Il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

Si les mathématiques sont un outil puissant de modélisation, que l'élève doit maîtriser, elles sont parfois plus contraignantes lorsqu'il s'agit d'en extraire une solution. L'évolution des techniques permet désormais d'utiliser aussi l'approche numérique afin de faire porter prioritairement l'attention des élèves sur l'interprétation et la discussion des résultats plutôt que sur une technique d'obtention. Cette approche permet en outre une modélisation plus fine du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ou l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. C'est aussi l'occasion pour l'élève d'exploiter les compétences acquises en informatique. C'est enfin l'opportunité de mener avec les professeurs d'informatique d'éventuelles démarches collaboratives.

Dans ce cadre, et vue la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation, les élèves doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul scientifique et numérique pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les élèves des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche. Les concepts mathématiques sous-jacents sont mis en avant et l'interprétation des résultats obtenus est facilitée. L'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles devient possible.

Concernant les capacités d'expression et de communication, cela suppose, à l'écrit, la capacité à comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration rigoureuse et, à l'oral, celle de présenter et défendre, de manière claire et synthétique, une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, exposés) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

Il est aussi souhaitable que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques rendent compte des interactions entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques ; ce qui met en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique. Ils montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière. Dans ce sens, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre problèmes et outils conceptuels ; les seconds sont développés pour résoudre les premiers mais deviennent à leur tour, et aux mains des mathématiciens, des objets d'étude qui posent de nouveaux problèmes et peuvent ultérieurement servir au

traitement d'autres classes de problèmes.

Une vision géométrique des problèmes imprègne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques etc.) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention. Dans ce cadre, on attachera une importance à l'aspect géométrique des notions et propriétés étudiées en ayant régulièrement recours à des figures et croquis, ce qui permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

1.2 Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de première année TSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en sections (numérotées 1, 2, ...). Chaque section comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires.

- le bandeau définit les objectifs essentiels, délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- les contenus fixent les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

La chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

1.3 Contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide. Il propose des contenus équilibrés d'algèbre, d'analyse et de géométrie, auxquels s'ajoute un enseignement de probabilités visant à consolider les notions étudiées au lycée. Les probabilités permettent de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des ponts avec les autres disciplines.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les élèves. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

La géométrie, en tant qu'outil de modélisation et de représentation, est intégrée à l'ensemble du programme, qui préconise le recours à des figures pour aborder l'algèbre linéaire et les fonctions de variable réelle.

Le programme porte d'une part sur le secteur de l'analyse et des probabilités, et d'autre part sur celui de l'algèbre et la géométrie du plan et de l'espace. L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des liens avec d'autres disciplines, et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE.

En plus des nombres complexes, le programme d'algèbre comprend l'étude des polynômes à une indéterminée et celle des notions de base de l'algèbre linéaire pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique, algébrique et numérique.

Il est important de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie. De même l'importance de la géométrie dans la représentation des notions et objets au programme ne saurait être sous-estimée ; ainsi, le programme préconise le recours à des figures géométriques chaque fois que cela est possible et notamment pour l'étude des nombres complexes, de l'algèbre linéaire, de la géométrie euclidienne et des fonctions d'une variable réelle.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de suite et de fonction ; les interactions entre les aspects discret et continu y sont mises en valeur. Il combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Les méthodes de l'analyse asymptotique sont exploitées dans l'étude des fonctions. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation ; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques et les sciences industrielles de l'ingénieur.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre des univers finis ; il permet d'illustrer certains résultats d'analyse et justifie l'introduction du vocabulaire ensembliste. La notion de variable aléatoire y est étudiée et permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste.

Le programme aborde les notions de convergence et de comparaison des ordres de grandeur (étude locale), l'étude des propriétés globales des fonctions liées à la continuité et à la dérivabilité, l'étude des probabilités et des variables aléatoires ainsi que les notions de dimension et de rang en algèbre linéaire. Il développe les techniques relatives

- à l'usage des inégalités (accroissements finis, convexité, TAYLOR-LAGRANGE, CAUCHY-SCHWARZ, etc.),
- aux calculs sur les nombres (entiers, réels, complexes) et les polynômes,
- à la pratique des développements limités et leurs applications,
- à l'étude de la convergence ou de la divergence d'une suite ou d'une fonction,
- à la résolution des équations différentielles linéaires scalaires,
- au calcul matriciel et à la résolution des systèmes linéaires,
- aux méthodes d'approximation et à la pratique d'algorithmes divers.

La pratique de calculs simples permet aux élèves de s'approprier de manière effective les notions du programme. Ils doivent savoir mettre en œuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

1.4 Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de première année TSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la première période est étudié complètement en premier lieu, lors des cinq premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé. Le programme doit être traité en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse et de probabilité d'une part et d'algèbre et de géométrie de l'autre.

Les objectifs majeurs du programme de la première période sont les suivants :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures en commençant les cours dans le prolongement des programmes du cycle du baccalauréat technologique, mettant ainsi à profit les connaissances acquises au lycée ;
- familiariser les élèves avec la terminologie française ;
- amener les élèves vers des problèmes effectifs d'analyse, de probabilités, d'algèbre ou de géométrie en veillant à développer leur :
 - intuition et imagination,
 - capacité à formuler clairement des résultats et à effectuer des raisonnements rigoureux,
 - capacité à argumenter et à mettre au point des démonstrations ;
- susciter la curiosité et l'intérêt des élèves en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux ;
- donner les bases mathématiques indispensables à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (physique, chimie, sciences industrielles, informatique, ...) ;
- éviter de proposer des exposés formels plus ou moins dogmatiques et inconsistants.

1.5 Recommandations pédagogiques pour le choix d'une progression

Ce programme propose divers types d'activités dont les unes mettent en œuvre des techniques classiques et bien délimitées qui doivent être maîtrisées par les élèves, les autres visent à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée, et avec lesquelles les élèves doivent acquérir une certaine familiarité. Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main de ces techniques classiques dont la maîtrise s'acquiert notamment grâce à des exercices et à des problèmes que les élèves doivent in fine être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les développements formels ou trop abstraits doivent être évités ; une place importante doit être faite aux applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela est possible avec les enseignements des sciences physique, des sciences industrielles et d'informatique. Il faut éviter autant les situations artificielles que les exercices de pure virtuosité technique.

Les interactions entre les différentes parties du programme sont fortes et méritent d'être soulignées, de même que les liens avec d'autres disciplines, permettant ainsi de mettre en évidence la spécificité et la valeur de la démarche mathématique. Quelques repères historiques, permettant d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, pourront être fournis aux élèves pour mettre en valeur la dimension et le contenu culturels des mathématiques avec Python.

L'évolution des matériels et logiciels conduit à renforcer la partie réservée à l'algorithmique. En effet, ces moyens de calcul permettent aux mathématiques de disposer d'un lien vivant à l'expérimentation.

Ainsi, on présentera de préférence, lorsque cela est possible, des méthodes constructives accompagnées de la description d'un algorithme plutôt que des démonstrations d'existence ou de convergence démunies de procédé de construction. La présentation des algorithmes s'entend sur deux niveaux. D'une part, ils peuvent être présentés sous une forme logique abrégée, sans référence obligatoire à un langage informatique particulier ; d'autre part, ils sont destinés à être mis en œuvre sur machine à l'occasion des heures passées en salle d'informatique sous forme de travaux pratiques de mathématiques avec Python.

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les sections qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale et en privilégiant la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution ; de même et afin de faciliter l'organisation du travail des élèves et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques.

Le professeur choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité¹ effective des élèves et en évitant tout dogmatisme, et ce quel que soit le temps d'enseignement proposé (cours, travaux dirigés, ...). En effet, l'acquisition des connaissances et le développement des capacités et des compétences sont d'autant plus efficaces que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu et les supports pédagogiques utilisés doivent motiver les élèves et favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie de ces derniers. Les situations de résolution de problèmes, de la modélisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite, favorisent cette mise en activité.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

1. “ Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn.” BENJAMIN FRANKLIN (« Dis-moi et j'oublie, enseigne-moi et je peux me rappeler, implique-moi et j'apprends. »)

2 Première période

2.1 Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations, outils et raisonnement nécessaires aux élèves pour la conception, l'argumentation et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.

Ces notions, qui trouvent naturellement leur place dans les autres sections, doivent être introduites de manière progressive, au fur et à mesure des besoins et des exemples rencontrés dans le programme, en vue d'être acquises en fin de la première période. Elles ne doivent faire l'objet d'aucune étude exhaustive bloquée en début d'année. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous.

On suppose les élèves familiers avec la théorie naïve élémentaire des ensembles. L'objectif est de fixer la terminologie.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves sachent :

- *utiliser correctement les connecteurs logiques ;*
- *utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;*
- *utiliser correctement les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;*
- *formuler la négation d'une proposition ;*
- *distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;*
- *utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;*
- *reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par contraposée, raisonnement par disjonction des cas, raisonnement par analyse-synthèse, raisonnement par l'absurde, raisonnements par récurrence.*

Implication, contraposition, équivalence, condition nécessaire, condition suffisante. Connecteurs ET et OU. Négation d'un énoncé.

Les élèves doivent être capables de formuler la négation d'un énoncé, d'une proposition.

Quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$.

Les élèves doivent être entraînés à l'emploi des quantificateurs pour formuler avec précision les énoncés mathématiques ainsi que leurs négations. On insistera sur la qualité de rédaction des textes mathématiques ou plus généralement scientifiques. En particulier, l'utilisation des quantificateurs et des symboles mathématiques en tant qu'abréviations est exclu.

Raisonnement par disjonction des cas; raisonnement par contraposition; raisonnement par analyse-synthèse; raisonnement par l'absurde.

Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément; toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Raisonnements par récurrence (simple, double).

Ensembles. Éléments d'un ensemble, relation d'appartenance. Parties (ou sous-ensembles) d'un ensemble, relation d'inclusion.

Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire. Recouvrement disjoint, partition d'un ensemble. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.

Application (ou fonction) d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F . Graphe d'une application. Restriction et prolongement.

Famille indexée par un ensemble non vide.

Indicatrice d'une partie A d'un ensemble E .

Image directe, image réciproque.

Composition d'applications.

Injection, surjection, bijection. Application réciproque d'une bijection. Composées de deux injections, de deux surjections, de deux bijections.

Réciproque de la composée de deux bijections.

Ces notions doivent être introduites au moyen de plusieurs exemples utilisant les acquis du lycée. Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de « condition nécessaire » et « condition suffisante ».

On ne construit pas $\mathbb{N}$, on rappelle et on utilise ses propriétés.

Les connaissances des élèves sur les suites arithmétiques ou géométriques et les calculs de sommes pourront servir de premier support d'étude, la mise en oeuvre d'un raisonnement par récurrence trouvant progressivement sa place dans des situations variées du programme.

L'ensemble vide est noté $\emptyset$, l'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$ ou $\overline{A}$ ou C_E^A ou A^c pour le complémentaire d'une partie A de E .

Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. On insistera sur l'existence et l'unicité de l'image de tout élément de l'ensemble de départ E .

Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E .

La restriction de f à A est notée $f|_A$.

Notation 1_A . On a $1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus A \end{cases}$

Notations $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

L'application réciproque d'une bijection f est notée f^{-1} . La notation $f^{-1}(B)$ est cohérente.

2.2 Nombres complexes : calculs algébriques et applications géométriques

L'objectif de cette section est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises en classe de terminale du cycle du baccalauréat. Le programme combine les aspects suivants :

- l'étude algébrique de $\mathbb{C}$ et des équations algébriques (équations du second degré, racines n -ièmes d'un nombre complexe) ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et leur utilisation en géométrie plane ;
- l'introduction de l'exponentielle complexe et l'étude de ses applications à la trigonométrie.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves sachent manipuler les nombres complexes et les utiliser pour résoudre des problèmes de géométrie plane.

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures.

Nombres complexes, conjugaison et module

Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe ; notations $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ peut être construit à partir de $\mathbb{R}^2$ mais le programme ne comporte aucun résultat théorique sur cette construction.

Conjugaison. Opérations sur les nombres complexes, propriétés.

Interprétation géométrique du conjugué. Compatibilité de la conjugaison avec les opérations.

Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur.

Le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct est identifié à $\mathbb{C}$.

Module d'un nombre complexe, relation $|z|^2 = z\bar{z}$. Module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.

Interprétation géométrique de $|z - z'|$, distance, cercle et disque.

Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Cercle trigonométrique $\mathbb{U}$. Paramétrisation par les fonctions circulaires cosinus et sinus

On présentera une justification géométrique de l'une de ces formules.

Définition de e^{it} , $t \in \mathbb{R}$. Relation $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$.

Les élèves doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ ainsi que les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Trigonométrie circulaire : formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$; cas particulier des formules de duplication $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$.

Cosinus, sinus et tangente de $\pi \pm \theta$, de $\frac{\pi}{2} \pm \theta$; cosinus, sinus et tangentes des angles usuels.

Les élèves doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.

Exemples de résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques simples.

Les élèves doivent savoir résoudre de telles équations et inéquations en s'aidant du cercle trigonométrique.

Formules d'EULER. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$ et de $e^{is} \pm e^{it}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Les élèves doivent savoir linéariser des puissances de fonctions circulaires et exprimer simplement des sommes comme $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Formule de MOIVRE

Les élèves doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Forme trigonométrique re^{it} avec $r > 0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Coordonnées polaires.

Interprétation géométrique de la multiplication d'un complexe par $e^{i\theta}$.

Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$; notation $a \equiv b[2\pi]$. Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$ (amplitude et phase).

Équations algébriques, racines de l'unité

Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$.

Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$; somme et produit des racines.

Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

Racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation $\mathbb{U}_n$.

Représentation géométrique.

Exponentielle complexe

Exponentielle complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}e^{i\operatorname{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si, et seulement si, $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.

Notation $\exp(z)$; module et arguments de e^z .

Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{c-a}{b-a}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $c \neq a$ et $b \neq a$.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité. Cocyclicité.

Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$. Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations. Cas général.

Interprétation géométrique de la conjugaison. Réflexions du plan.

L'étude générale des similitudes indirectes est hors programme.

2.3 Compléments de calcul algébrique

Cette section porte sur un certain nombre de points importants pour la suite de la formation :

- calculs de sommes et de produits de nombres réels ou complexes, dont la formule du binôme ;
- résolution de systèmes linéaires en petite dimension par l'algorithme du pivot de GAUSS.

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreux exemples de calculs et d'applications.

2.3.1 Sommes et produits de nombres complexes

L'objectif est ici de faire acquérir aux élèves une aisance dans la manipulation des symboles $\sum$ et $\prod$ sur des exemples de difficulté raisonnable.

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels ou complexes.

Sommes et produits télescopiques; exemples de changements d'indices et de regroupements de termes. Sommes doubles, sommes triangulaires. Produit de deux sommes finies.

Rappel de la notion de suite de nombres réels ou complexes.

Suites arithmétiques, suites géométriques.

Calculs de sommes portant sur les termes consécutifs de suites arithmétiques ou géométriques; en particulier, somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.

Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Factorielle. Coefficients binomiaux.

Expression des coefficients binomiaux avec la fonction factorielle. Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Relation (ou formule du triangle) de PASCAL :

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}.$$

Formule du binôme de NEWTON dans $\mathbb{C}$: Si $n \in \mathbb{N}^*$

et $a, b \in \mathbb{C}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Notations $\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i \in I} a_i, \prod_{i=1}^n a_i, \prod_{i \in I} a_i$, avec I fini.

Cas où I est vide.

On pourra aussi présenter les calculs avec des points de suspension.

Cas de $\sum_{(i,j) \in A} x_{i,j}$ et $\prod_{(i,j) \in A} x_{i,j}$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^2$.

Exemples simples.

Calcul du n -ième terme.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}$, expressions simplifiées des sommes usuelles : $\sum_{k=1}^n k, \sum_{k=1}^n k^2, \sum_{k=1}^n k^3$ et $\sum_{k=0}^n q^k$.

Si $n \geq 2$, $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$.

Notations $n!, \binom{n}{p}$; convention $\binom{n}{p} = 0$ pour $p < 0$ et $p > n$.

Ces relations pourront faire l'objet de manipulations sur la notation factorielle.

La relation de PASCAL fournit un algorithme pour le calcul numérique des coefficients binomiaux, à programmer en Python.

Cette formule sera démontrée par récurrence.

2.3.2 Systèmes linéaires en petite dimension

Système linéaire à coefficients réels ou complexes de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues. Solution d'un tel système.

Résolution par l'algorithme du pivot de GAUSS et mise en évidence des opérations élémentaires sur les lignes.

Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$.

Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$.

2.4 Géométrie élémentaire du plan et de l'espace

À l'issue de la classe terminale, les élèves connaissent « le plan géométrique » euclidien et « l'espace géométrique » euclidien (de dimension 3) en tant qu'ensembles de points. Ils connaissent en particulier la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que les propriétés opératoires usuelles des vecteurs. Il s'agit de leur faire constater que l'ensemble des vecteurs du plan (resp. de l'espace) est muni d'une structure de plan vectoriel (resp. d'espace vectoriel de dimension 3) en l'identifiant à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$ (resp. à $\mathbb{R}^3$) par la donnée d'une base orthonormale. Toute théorie générale sur la notion d'espace vectoriel est exclue à ce stade.

Dans le plan et l'espace, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormal, angles.

La géométrie joue un rôle essentiel en mathématiques et dans les disciplines scientifiques et technologiques ; elle est au cœur des compétences de modélisation et de représentation. Cette section doit être traitée en liaison avec les autres disciplines ; dans ce cadre, il est recommandé d'aborder les notions de repérage et de produit vectoriel dans l'espace en concertation avec les professeurs des disciplines scientifiques et technologiques.

2.4.1 Cas du plan

Les notions d'orientation du plan et celle de base orthonormale directe sont admises.

Repère cartésien du plan, coordonnées cartésiennes.	On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires.
Repère orthonormal (orthonormé), orthonormal direct, changement de repère.	(e_1, e_2) étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$, repère polaire $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ défini par : $\vec{u}(\theta) = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2$ et $\vec{v}(\theta) = -(\sin \theta)e_1 + (\cos \theta)e_2$.
Coordonnées polaires d'un point du plan supposé muni d'un repère orthonormé.	Les élèves doivent maîtriser le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.
Systèmes de points pondérés et barycentre d'un système de points pondérés.	Construction du barycentre d'un système d'au plus 4 points du plan.
Coordonnées du barycentre dans un repère du plan.	Illustration pour le cas de l'isobarycentre de deux ou trois points.
Définition géométrique du produit scalaire. Interprétation en termes de projection orthogonale. Bilinéarité, symétrie du produit scalaire ; expression dans une base orthonormale directe. Orthogonalité de deux vecteurs.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sinon. Les élèves doivent être capables de déterminer une mesure d'un angle non orienté.

Définition géométrique du déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée directe. Bilinearité, antisymétrie.

Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs.

Droite, vecteur directeur, vecteur normal ; équation cartésienne et système d'équations paramétriques.

Cercle, équation cartésienne, représentation paramétrique.

Transformations affines du plan : translation, rotation, homothétie, réflexion.

Notations $[\vec{u}, \vec{v}]$ ou $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $[\vec{u}, \vec{v}] = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$; sinon $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$.

Interprétation du déterminant en termes d'aire orienté (ou algébrique) d'un parallélogramme ; interprétation de sa valeur absolue en termes d'aire géométrique.

Intersection de deux droites ; projeté orthogonal d'un point sur une droite ; distance d'un point à une droite.

Les élèves doivent être capables de donner une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon ou connaissant un diamètre, et de déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir d'une équation.

Les élèves doivent connaître divers modes de représentation de ces transformations : modes géométrique et analytique.

2.4.2 Cas de l'espace

Dans cette sous section, on adapte à l'espace les notions étudiées dans le cas du plan. L'étude de ce contenu mathématique nouveau s'appuie de façon essentielle sur les acquis des élèves en géométrie plane et sur l'intuition géométrique qu'ils ont développé dans les autres disciplines.

La notion d'orientation de l'espace et celle de base orthonormale directe sont admises ; la notion d'orientation de l'espace repose sur les conventions physiques usuelles.

Repère cartésien de l'espace, coordonnées cartésiennes.

Repère orthonormal (orthonormé), orthonormal direct, changement de repère.

Définition géométrique du produit scalaire.

Bilinearité, symétrie.

Définition géométrique du produit vectoriel.

Bilinearité, antisymétrie du produit vectoriel ; expression dans une base orthonormale directe.

On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.

Expression dans une base orthonormale.

Notations $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur de norme $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$; sinon $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Les élèves doivent être capables de déterminer si deux vecteurs sont colinéaires.

Produit mixte (ou déterminant dans une b.o.n.d.) de trois vecteurs.

Interprétation de $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ comme volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Trilinéarité, antisymétrie. Développement du déterminant selon la troisième colonne, en lien avec la définition.

Plan de l'espace : définition par un point et deux vecteurs non colinéaires, un point et un vecteur normal ou trois points non alignés.

Droites de l'espace : définition par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts ou comme intersection de deux plans.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan. Distance d'un tel point à un plan ou une droite.

Sphère, équation cartésienne en repère orthonormé. Intersection d'une sphère et d'un plan.

Notation $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Les élèves doivent être capables de déterminer si trois vecteurs sont coplanaires.

Expression du produit mixte dans une base orthonormale directe.

Équation cartésienne, système d'équations paramétriques.

Obtention d'un vecteur directeur d'une droite définie comme intersection de deux plans. Détermination d'un système d'équations cartésiennes ou d'un système d'équations paramétriques d'une droite.

Les élèves doivent être capables de donner une équation d'une sphère à partir de son centre et de son rayon, et de déterminer le centre et le rayon d'une sphère à partir d'une équation.

2.5 Nombres réels et suites numériques

Cette section pose les fondements du programme d'analyse en TSI. L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximations de nombres réels).

2.5.1 Nombres réels

Les nombres réels sont supposés connus ; on rappelle leurs propriétés fondamentales sans pour autant adopter un point de vue axiomatique, en mettant l'accent sur le principe de la borne supérieure / inférieure.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves aient une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités et soient entraînés à l'usage de la caractérisation de la borne supérieure / inférieure.

On peut utiliser les quantificateurs pour formuler certaines propriétés des réels (notamment celles relatives à l'ordre) et obtenir leurs négations.

Nombre entiers relatifs, rationnels, réels, irrationnels.

$\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné.
Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.

Valeur absolue d'un réel. Inégalités triangulaires.

Propriété d'ARCHIMÈDE. Partie entière. Approximations décimales d'un réel.

Majorant, minorant d'une partie non vide. Plus grand (maximum), plus petit élément (minimum) d'une partie non vide (sous réserve d'existence).

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.

Segment.

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie X non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.

Axiome de la borne supérieure.

On vérifie les propriétés lui conférant une structure de corps, mais la définition axiomatique des corps et la construction de $\mathbb{R}$ sont hors programme.

Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $|x - a| \leq \varepsilon$ ou $|x - a| < \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$.

Notation $\lfloor x \rfloor$. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.

$[a, b]$ peut être introduit comme étant l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.

Intervalle admettant un plus petit et un plus grand élément

Caractérisation. Notations $\sup X$ (resp. $\inf X$).

Toute partie majorée (resp. minorée) non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Résultat admis.

2.5.2 Suites numériques

Cette sous section est consacrée aux suites numériques et combine l'étude des aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) et celle des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

On soulignera l'intérêt des suites, tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).

Mode de définition d'une suite : explicite, implicite, par récurrence.

Opérations sur les suites.

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.

Limite finie ou infinie d'une suite

Unicité de la limite.

Suite convergente, divergente

Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.

L'étude des suites récurrentes générales sera abordée après celle de la dérivation ; cette étude sera l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence.

Combinaison linéaire, produit, quotient.

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Notation $u_n \longrightarrow l$

Écriture $\lim u_n = l$.

Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Exemples de formes indéterminées.

Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème de convergence par encadrement.
Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.

Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.

Théorème des suites adjacentes.

Suite extraite.

Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l , alors (u_n) tend vers l .

Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).

Cas des suites complexes : brève extension des définitions et résultats précédents.

Suites arithmétiques, suites géométriques.

Suites arithmético-géométriques.

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants ; équation caractéristique ; cas complexe, cas réel.

Mieux : $u_n \in]\ell/2, 3\ell/2[$ pour n assez grand.

Utilisation d'une majoration de la forme $|u_n - \ell| \leq v_n$, où $(v_n)_n$ converge vers 0.

Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Résultats analogues pour une suite décroissante.
Intérêt algorithmique de cette notion pour la résolution approchée par dichotomie d'une équation du type $f(x) = 0$.

Utilisation pour montrer la divergence d'une suite.

Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).

Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

Calcul du n -ième terme.

Exemples de calculs de sommes portant sur les termes de suites arithmétiques ou géométriques.
Pour les suites $(u_n)_n$ vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$, où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante puis détermination des solutions en se ramenant au cas d'une suite géométrique.

Pour les suites $(u_n)_n$ vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 du type $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, recherche d'une solution de la forme $(\lambda^n)_n$ puis détermination des solutions en considérant la suite $(u_{n+1} - \lambda u_n)_n$ pour se ramener au cas d'une suite géométrique.

Si α et β sont réels, description des solutions réelles.

2.6 Fonctions de la variable réelle, limites et continuité

Cette section est consacrée à l'étude des notions de limite et de continuité d'une fonction à valeurs réelles ou complexes. Les propriétés à caractère local sont énoncées et étudiées finement à l'aide des ε et des η .

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves aient une bonne maîtrise des propriétés locales et globales des fonctions continues.

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. On tâchera ici de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

2.6.1 Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

Graphes des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(a - x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$.

Parité, imparité, périodicité ; réduction du domaine d'étude.

Interprétation géométrique de ces propriétés.

Somme $f + g$, produit fg , composée $g \circ f$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$.

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Traduction géométrique de ces propriétés.

Une fonction f est bornée si, et seulement si, $|f|$ est majorée.

2.6.2 Limites et continuité

Les notions de limites ont déjà été abordées pour les suites, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats sans démonstrations.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et sont à valeurs réelles sauf mention explicite du contraire. Le point a considéré par la suite est toujours élément de I ou extrémité de I .

On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a lorsque a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$, si $a = +\infty$, avec un intervalle $] -\infty, A]$ si $a = -\infty$.

Limite finie ou infinie d'une fonction en a .

Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$

Unicité de la limite.

Écritures $\lim_a f = l$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Si f est définie en a et possède une limite l en a , alors $l = f(a)$.

Si f possède une limite finie en a , f est bornée au voisinage de a .

Limite à droite, limite à gauche.

Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$

Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).

Opérations algébrique sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.

Composition de limites. Conservation des inégalités larges par passage à la limite.

Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$).
Théorème de la limite monotone.

Continuité, prolongement par continuité en un point.

Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient.

Composition de fonctions continues.

Continuité sur un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

Calcul approché d'un zéro d'une fonction continue par l'algorithme de dichotomie.

Théorème des bornes atteintes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment

Continuité et monotonie stricte.

La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur I est continue.

Extension des définitions et résultats précédents au cas de fonctions à valeurs complexes.

Notations $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Notations $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$.

Exemples de formes indéterminées.

Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et si y est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = y$. Il en résulte que l'image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue réelle définie sur I est un intervalle.
Principe de démonstration par dichotomie.

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

La fonction f étant supposée à valeurs réelles et continue sur I , elle est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone.

Toute fonction f réelle, continue et strictement monotone sur un intervalle I , admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur l'intervalle $f(I)$.

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

2.7 Fonctions de la variable réelle, dérivation

Cette section est consacrée à l'étude de la dérivation ; on y aborde aussi les suites récurrentes. Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- aient une bonne maîtrise des propriétés locales et globales des fonctions dérivables et soient capables de démontrer celles qui seront étudiées à ce stade ;
- puissent mener l'étude d'une fonction (continuité et dérivabilité, prolongement, symétries, périodicité, domaine d'étude, sens de variations, recherche d'extremums et obtention d'inégalités, tracé du graphe et détermination des asymptotes, tracé du graphe de la réciproque, ...) ;
- aient une connaissance à la fois théorique et pratique des principales inégalités (inégalité des accroissements finis , inégalités de convexité, inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, etc.).

On attachera une importance à l'aspect géométrique des propriétés étudiées en ayant recours à de nombreuses figures pour les illustrer et les visualiser.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et sont à valeurs réelles sauf mention explicite du contraire. Le point a considéré par la suite est toujours élément de I .

2.7.1 Fonctions dérivables

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.
La dérivabilité entraîne la continuité.
Dérivabilité à gauche, à droite.

Définition par le taux d'accroissement.

Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas, $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Interprétation géométrique : tangente au graphe en un point.

Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.
Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient.
Dérivée d'une fonction composée, dérivée de la fonction réciproque.

Tangente au graphe d'une fonction réciproque.

Extremum local, extremum global.
Si f est dérivable et présente un extremum local en un point a intérieur à I alors a est un point critique de f
Théorème de ROLLE, égalité des accroissements finis.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

Interprétations géométrique et cinématique. Application à l'existence de zéros d'une fonction.

Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par k , alors f est k -lipschitzienne.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction. Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de LEIBNIZ), quotient.

Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Extension des définitions et résultats précédents aux fonctions complexes.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.

La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.

Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans la sous section suivante.

Caractérisation de la dérivabilité et de la classe $\mathcal{C}^k$ en termes de parties réelle et imaginaire.

On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale à faire le moment venu.

2.7.2 Suites récurrentes

L'étude des suites récurrentes est l'occasion d'introduire la notion de vitesse de convergence. Sur des exemples, on mettra en évidence divers comportements (convergence lente, géométrique, quadratique) en explicitant le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée.

Lors de l'étude d'une suite de nombres réels définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, il est utile de mettre en valeur le rôle des variations de f pour en déduire celles de la suite (u_n) . En outre, pour étudier la vitesse de convergence vers a de u_n , on peut exploiter le comportement local de f au voisinage de a et, notamment, une inégalité du type (lipschitzien) $|f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$ où $0 \leq k < 1$, ou du type (quadratique) $|f(x) - f(a)| \leq \lambda|x - a|^2$, $\lambda > 0$.

Intervalle stable par une fonction, point fixe d'une fonction.

Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et si f est continue en a alors a est un point fixe de f .

Exemples d'étude dans le cas où f est monotone ou lipschitzienne.

Pour l'étude de la monotonie de (u_n) , on soulignera l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $x \mapsto f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f .

Algorithme de recherche du point fixe pour une fonction contractante; mise en pratique de la méthode de NEWTON dans des cas simples.

2.8 Fonctions usuelles, fonctions convexes

Cette section est consacrée à l'étude des fonctions usuelles et des fonctions convexes.

2.8.1 Généralités sur l'étude d'une fonction

Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude.

Tableau de variations.

Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.

Asymptotes.

Tracé du graphe.

Graphe d'une réciproque.

2.8.2 Fonctions usuelles

Les fonctions puissances, l'exponentielle réelle et les fonctions sinus et cosinus sont décrites en détail mais leur existence est admise ; leurs propriétés peuvent être démontrées en partie. On en déduit l'étude des autres fonctions usuelles.

Il est attendu qu'à l'issue de cette sous section, les élèves aient une bonne connaissance des fonctions usuelles et soient en particulier capables de se représenter leur graphe, de définir les fonctions trigonométriques réciproques (circulaires et hyperboliques), de manipuler les formules d'addition, etc.

Notations internationales standard : exp, ln, cos, sin, tan, cot, cosh, sinh, tanh, coth, arccos, arcsin, arctan, arccosh, arcsinh, arctanh.

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Dérivées, variations et graphes.

Les fonctions puissances sont définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur l'intervalle $] -\infty, 0[$.

Logarithme décimal, logarithme en base 2.

Relations fonctionnelles.

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques

sin, cos, tan, sinh, cosh, tanh.

Fonctions réciproques

arcsin, arccos, arctan, arcsinh, arccosh, arctanh.

Fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

2.8.3 Fonctions convexes

L'objectif de cette sous section est d'étudier les fonctions convexes d'une variable réelle. Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures. On soulignera l'intérêt des fonctions convexes pour obtenir des inégalités.

Fonctions à valeurs réelles convexes ; inégalité de convexité. Fonctions concaves. Interprétation géométrique.

Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (x, y) de I^2 et tout λ de $[0, 1]$:
 $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Inégalité de JENSEN

Si f est convexe sur I , $x_1, x_2, \dots, x_n$ des points de I et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{R}^+$ de somme 1 alors $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Caractérisations : position relative du graphe et d'une de ses cordes, inégalité des pentes.

Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I , des fonctions convexes deux fois dérivables sur I .

Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.

Applications : Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ, de YOUNG, inégalité arithmético-géométrique.

Les démonstrations de ces applications pourront être faites à titre d'exercices.

2.9 Primitives et équations différentielles linéaires

Cette section est consacrée au calcul des primitives et à l'étude des équations différentielles linéaires ; le point de vue adopté est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul intégral utilisées sont différées à une section ultérieure qui sera traitée lors de la deuxième période.

Pour illustrer le cours sur les équations différentielles, on traitera des exemples notamment issus des autres disciplines scientifiques et on étudiera sur quelques exemples le problème de raccordements de solutions.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- soient capables de mener des calculs de primitives dans des cas usuels et sachent reconnaître les dérivées de fonctions composées ;*
- puissent mettre en pratique, sur des exemples simples, les techniques d'intégration par parties et de changement de variable ;*
- sachent appliquer les deux points précédents lors de l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre et celles du second ordre à coefficients constants.*

Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

2.9.1 Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle. Exemples.

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme.

Application du calcul des primitives à celui d'intégrales.

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$, où f est continue.

Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Changement de variable : si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Les élèves doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$. Ils doivent aussi savoir calculer les primitives d'une fonction du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$.

Pour une fonction f continue sur I , l'intégrale de a à b , $\int_a^b f(x) dx$, est donnée par $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I .

Résultat admis.

Exemples de calculs d'intégrales au moyen d'une intégration par parties

Exemples de calculs d'intégrales au moyen d'un changement de variables.

Intérêt d'un changement de variable affine pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener au cas où l'intervalle d'intégration est $[0, 1]$ ou $[-1, 1]$.

2.9.2 Équations différentielles linéaires

Les équations différentielles constituent un champ à la fois très riche pour les mathématiques, pour les sciences physiques et les sciences industrielles de l'ingénieur. Cette section doit être traitée en concertation avec les professeurs des autres disciplines afin de l'illustrer par des exemples issus des domaines scientifiques et technologiques.

Équation différentielle linéaire générale du premier ordre.

Équation homogène associée.

Notion de solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Forme générale des solutions de l'équation complète.

Principe de superposition des solutions.

Cas des équations différentielle linéaire du premier ordre résolues en y' .

Résolution de l'équation homogène associée à (1) dans le cas particulier où la fonction a est constante.

Résolution de l'équation homogène associée à (1) dans le cas général.

De la forme $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$, où α , β et γ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Il s'agit de l'équation $\alpha(x)y' + \beta(x)y = 0$.

Somme d'une solution particulière (s'il en existe) et de la solution générale de l'équation homogène.

Elles sont du type

$$y' + a(x)y = b(x), \quad (1)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les solutions sont du type $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, où A est une primitive de a sur l'intervalle I et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Résolution de l'équation (1) dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto \alpha e^{\mu x}$, avec $(\alpha, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ou de la forme $x \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ avec $(\alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{R}^3$.

Méthode de variation de la constante pour la résolution de l'équation (1) dans le cas général.

Problème de CAUCHY associé à (1) et au couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K} : \begin{cases} y' + a(x)y = b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

Existence et unicité de la solution d'un problème de CAUCHY associé à (1).

Application à la modélisation des circuits électriques RC, RL et des systèmes mécaniques linéaires.

Exemples d'étude dans des cas simples d'équations de type

$$a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

la fonction a pouvant s'annuler en des points de I .

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Notion de solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Résolution de l'équation homogène associée à (2). Cas réel et complexe : équation caractéristique, système fondamental de solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition des solutions.

Forme générale des solutions de l'équation complète : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Problème de CAUCHY associé à (2) et au triplet $(x_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K}^2 : \begin{cases} y'' + ay' + by = f(x), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$

Les élèves doivent être capable de déterminer une solution particulière dans chacun de ces cas.

Expression intégrale des solutions de l'équation complète.

Il s'agit d'étudier l'existence et l'unicité de la solution sur I de (1), vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Justification à l'aide de l'expression intégrale des solutions de l'équation complète.

Régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.

Raccordements de solutions : on présentera en détail des exemples de recollement de solutions et de recherche de solutions maximales.

Du type

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad (2)$$

où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si a et b sont complexes, recherche d'une solution du type $x \mapsto e^{\mu x}$, avec $\mu \in \mathbb{C}$, puis détermination des solutions en se ramenant, à l'aide de la fonction $z : x \mapsto y(x)e^{-\mu x}$, à une équation différentielle linéaire du premier ordre. Si a et b sont réels, description des solutions réelles.

Les élèves doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto \alpha e^{\lambda x}$, avec $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, ou de la forme $x \mapsto \beta \cos(\omega x)$ ou $x \mapsto \beta \sin(\omega x)$, avec β, ω des réels, et plus généralement dans le cas où le second membre est une fonction polynôme-exponentielle $x \mapsto P(x)e^{\lambda x}$, $(P, \lambda) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}$. Il s'agit d'étudier l'existence et l'unicité de la solution sur I de (2), vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

Existence et unicité de la solution d'un problème de CAUCHY.

Résultat admis.

Équations $y'' \pm \omega^2 y = 0$, avec $\omega > 0$, et problèmes de Cauchy associés.

Les solutions relèvent des automatismes de calcul.

Application à la modélisation des circuits électriques LC, RLC et des systèmes mécaniques linéaires.

2.10 Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires

Le but de cette section est d'introduire le calcul matriciel et d'étudier, dans un cadre plus général, les systèmes d'équations linéaires à coefficients réels ou complexes ; les solutions de tels systèmes sont obtenues en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes (méthode du pivot de GAUSS-JORDAN) ; dans ce cadre, l'aspect matriciel des opérations élémentaires sera abordé et mis en œuvre. On mettra aussi en valeur la méthode du pivot, pour son intérêt mathématique et algorithmique, ainsi que pour ses applications aux disciplines scientifiques et technologiques.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- maîtrisent le calcul matriciel et les systèmes linéaires ;
- soient capables, au moyen de l'algorithme du pivot de GAUSS-JORDAN, de résoudre un système linéaire et d'inverser une matrice carrée.

Dans toute la section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.10.1 Calcul matriciel

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.

Matrices élémentaires.

Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.

Si X est une matrice colonne, la matrice produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .

La j -ème colonne du produit AB est le produit de A par la j -ème colonne de B ; sa i -ème ligne est le produit de la i -ème ligne de A par B .

Cas particulier de la multiplication d'une matrice, à droite par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou la multiplication à gauche par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, pour en extraire une ligne ou une colonne.

Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.

Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.

Notations tA , A^T .

Opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes d'une matrice. Interprétation en termes de produit matriciel.

Interprétation des matrices élémentaires en termes d'opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes.

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées ; matrice identité, matrice scalaire ; produit de deux matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notation I_n ; non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro et de matrices nilpotentes.

Matrice diagonale, matrice triangulaire supérieure/inférieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures/inférieures.

Matrice symétrique, antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notations $\mathcal{S}_n(K)$, $\mathcal{A}_n(K)$.

Formule du binôme de NEWTON dans $\mathcal{M}_n(K)$ pour deux matrices qui commutent.

Application au calcul de puissances.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: matrice inversible, inverse, groupe linéaire ; transposition et inversion de matrices.

Notation $\text{GL}_n(\mathbb{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Inverse d'un produit de matrices inversibles.

Condition d'inversibilité et inverse d'une matrice diagonale. Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

L'inverse d'une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure/inférieure) est une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure/inférieure).

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité. Calcul de l'inverse d'une matrice par opérations élémentaires.

2.10.2 Systèmes d'équations linéaires

Généralités

Système linéaire de n équations à p inconnues, à coefficients $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ et second membre $b_1, \dots, b_n$. Les $a_{i,j}$ et b_i sont éléments de $\mathbb{K}$. On peut présenter le système sous forme de couple : matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des $a_{i,j}$, colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des b_i .

Système linéaire homogène.

Solution d'un système linéaire.

Système compatible.

Tout système homogène est compatible et l'ensemble de ces solutions est stable par combinaisons linéaires.

On introduit aussi T , appelé matrice augmentée, de terme général $t_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ b_i & \text{si } j = p+1 \end{cases}$.

T se note simplement $(A|B)$; ces présentations simplifiées sont intéressantes pour le traitement informatique d'un système linéaire.

Les b_i sont tous nuls.

Les solutions sont définies comme éléments de $\mathbb{K}^p$.

Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Traduction matricielle d'un système linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_p$, à coefficients $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ et de second membre $b_1, \dots, b_n$.

Système linéaire homogène associée à un système linéaire donnée $AX = B$.

Condition de compatibilité d'un système linéaire.

Description des solutions d'un système compatible au moyen d'une solution particulière et des solutions du système homogène associé.

Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire (resp. d'une matrice). Une opération élémentaire transforme un système linéaire en un autre système linéaire qui possède le même ensemble de solutions.

Deux systèmes sont dits équivalents si on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Deux matrices sont dites équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Si on passe d'un système $\mathcal{S}$ à un autre système $\mathcal{S}'$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $\mathcal{S}'$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $\mathcal{S}$.

$AX = B$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ étant la matrice colonne des x_i .

$$AX = 0$$

Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A .

Les solutions d'un système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé $AX = 0$.

On utilise les notations : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $i \neq j$ (transvection) ; $L_i \leftrightarrow L_j$, $i \neq j$ (échange) ; $L_i \leftarrow \alpha L_i$, $\alpha \neq 0$ (dilatation).

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Lien avec les systèmes linéaires.

Notation $A \underset{L}{\sim} A'$.

Cela justifie la présentation matricielle d'un système linéaire.

Échelonnement et algorithme du pivot de GAUSS-JORDAN

Matrice échelonnée par lignes : une matrice A est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. si une ligne de A est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
2. quand deux lignes successives de A sont non nulles, l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne supérieure est strictement inférieur à l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne inférieure.

Dans une matrice échelonnée par lignes, chaque premier terme non nul d'une ligne non nulle est appelé pivot.

Une matrice non nulle $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est échelonnée par lignes s'il existe un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et une application $\varphi : \llbracket 1, k \rrbracket \mapsto \llbracket 1, p \rrbracket$, strictement croissante, tels que $a_{i,\varphi(i)} \neq 0$ si $1 \leq i \leq k$, et $a_{i,j} = 0$ dès que $(j < \varphi(i) \text{ ou } i > k)$.

Un schéma en « escalier » permet d'éclairer la notion de matrice échelonnée et de l'illustrer.

Les élèves doivent être capables de reconnaître et d'exploiter des matrices échelonnées pour l'étude de systèmes linéaires.

Matrice échelonnée réduite par lignes.

Algorithme du pivot de GAUSS-JORDAN : en utilisant les opérations élémentaires sur ses lignes, on peut transformer une matrice non nulle en une matrice échelonnée réduite par lignes.

Mieux : toute matrice non nulle est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Formulation matricielle de l'algorithme de GAUSS-JORDAN.

Le système linéaire $AX = B$ est dit échelonné si sa matrice A est échelonnée.

Résolution d'un système linéaire

En utilisant échanges de lignes et transvections, on peut transformer un système linéaire $AX = B$ en système échelonné.

Inconnues et équations principales ; inconnues secondaires ou paramètres.

Condition de compatibilité d'un système linéaire $AX = B$, avec $A \neq 0$.

Exemples de résolution de systèmes linéaires compatibles et échelonnés.

Structure de l'ensemble des solutions d'un système compatible.

Rang d'un système linéaire ; rang d'une matrice.

Une matrice échelonnée par lignes est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Unicité admise.

Les élèves doivent être capables de déterminer la matrice échelonnée réduite par lignes associée à une matrice donnée.

On reprend brièvement l'algorithme du pivot vu au début de l'année, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général mais toute technicité est exclue.

Pour toute matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice échelonnée réduite par lignes $E \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, uniquement déterminée, et une suite finie de matrices élémentaires $P_1, \dots, P_N$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $E = P_N \cdots P_1 A$.

Si $A \neq 0$, un changement d'indexation des inconnues permet, dans une ultime étape, d'obtenir un système échelonné pour lequel $\varphi(i) = i$, quel que soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Le nombre k de pivots est un invariant de la matrice A (cf. notion de rang d'une matrice).

Faire le lien entre nombre d'équations principales, nombre d'inconnues principales et nombre de pivots.

L'invariance du nombre de pivots est admise à ce stade.

En le transformant en un système échelonné, les $n - k$ dernières équations de ce dernier système fournissent ladite condition de compatibilité, k étant le nombre de pivot.

On détermine les inconnues principales en fonction des paramètres.

Pour des systèmes de taille $n > 3$ ou $p > 3$, on utilise l'outil informatique. On met en évidence sur un exemple l'instabilité numérique de la méthode due aux erreurs d'arrondis.

Notation $\text{rg}(A)$. Le rang est ici défini comme égal au nombre de pivots.

Cas particulier des systèmes carrés. Application au calcul de l'inverse d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, par résolution de système linéaire $AX = Y$.

Application aux problèmes d'intersection en géométrie du plan et de l'espace.

Calcul de l'inverse d'une matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ par différents moyens (par résolution d'un système, à l'aide de la matrice augmentée $(A|I_n)$ qui se transforme par des opérations élémentaires en $(I_n|A^{-1}), \dots$).

Application à l'étude de familles de vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Composantes ou coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{K}^n$.
Combinaison linéaire d'une famille finie $\mathcal{F}$ de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$, avec $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Famille libre, famille liée.

Caractérisation d'une famille libre : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de $\mathbb{K}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre ;
- le système homogène $AX = 0$ n'admet que l'unique solution triviale ;
- le rang de A est à égal à p .

Famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.

Caractérisation d'une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$: si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de $\mathbb{K}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice ;
- pour toute matrice colonne B à n lignes, le système $AX = B$ est compatible ;
- le rang de A est à égal à n .

Notations $\text{Vect}(\mathcal{F})$, $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ pour l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\mathcal{F}$.

Les élèves doivent être capables de déterminer si une famille de vecteurs est libre ou liée.

L'équivalence de ces trois propriétés dans un cadre général et formel n'est pas attendu du programme. En revanche, sa mise en oeuvre sur des exemples permet d'illustrer le changement de registres : ici vectoriel, matriciel, et algébrique celui des systèmes d'équations linéaires.

Une famille finie $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est dite génératrice si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{K}^n$.

Les élèves doivent être capables de déterminer un système d'équations linéaires de $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Interprétation géométrique dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

3 Deuxième période

Il s'agit de compléter les résultats de la première période en développant :

- l'étude des développements limités et le calcul asymptotique, et leurs applications en analyse ;
- l'étude des polynômes et des fractions rationnelles ;
- l'étude des notions fondamentales relatives aux espaces vectoriels et les applications linéaires, dans leur aspect géométrique ;
- l'utilisation du calcul matriciel en algèbre linéaire ;
- une construction rigoureuse de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment ;
- une introduction au dénombrement et une brève initiation aux techniques élémentaires de la combinatoire ;
- l'étude des probabilités sur un univers fini et celle des variables aléatoires, ce qui permet de disposer des outils permettant de modéliser et d'aborder, sur des exemples simples, l'étude des situations concrètes où le hasard intervient

3.1 Polynômes et fractions rationnelles

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base de ces objets formels et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

On présente la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles, uniquement dans des situations simples. L'objectif est de présenter aux élèves un outil qui leur permette de mener à bien des calculs d'intégration, de dérivation, de somme, etc.

Le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et une indéterminée. La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.

Combinaison linéaire et produit de polynômes ; formule du binôme de NEWTON.

Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.

Opérations sur les degrés : somme, produit.

Le degré du polynôme nul est $-\infty$.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n .

Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.

Composition de polynômes.

Multiplés et diviseurs d'un polynôme, divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$.

Théorème de la division euclidienne.

Algorithme de la division euclidienne.

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.

Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Multiplicité d'une racine.

Polynôme scindé. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.

Dérivée formelle d'un polynôme.

Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de LEIBNIZ. Formule de TAYLOR polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

Théorème de d'ALEMBERT-GAUSS.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.

Algorithme de HORNER pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.

Si $P(a) \neq 0$ a est racine de P de multiplicité 0.

Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

La démonstration est hors programme.

Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.

Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

Fonction rationnelle associée.

La démonstration est hors programme.

Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.

Application au calcul de primitives, de dérivées successives.

3.2 Développements limités, calcul asymptotique

Cette section est consacrée aux développements limités et le calcul asymptotique. Son objectif est de familiariser les élèves avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant.

On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison. De même, on expose le calcul des développements limités (somme et produit de fonctions, ...) à partir d'exemples explicites, en évitant toute présentation systématique.

On insiste sur l'estimation des restes ; pratiquement, on écrira par exemple $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \beta(x)x^4$ où β est une fonction continue en 0, plutôt que $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- connaissent les développements limités usuels ;
- maîtrisent la pratique du calcul asymptotique et ses applications au calcul des limites, à l'étude locale des fonctions et des courbes, etc.

En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels auxquels il convient d'initier les élèves.

Relations de comparaison pour les suites : domination, négligeabilité et équivalence.

Traduction à l'aide du symbole $\circ$ des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^\beta(n)$, n^α , $e^{\gamma n}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Liens entre les relations de comparaison.

Règles usuelles de manipulation des relations de comparaison.

Obtention d'un équivalent par encadrement.

Propriétés conservées par équivalence.

Adaptation aux fonctions des définitions et résultats précédents.

Traduction à l'aide du symbole $\circ$ des croissances comparées des fonctions $x \mapsto \ln^\beta(x)$, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto e^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $x \mapsto \ln^\beta(x)$ et $x \mapsto x^\alpha$ en 0.

Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie la fonction $h \mapsto f(a+h)$ au voisinage de 0.

Développement limité, unicité des coefficients, règle de troncature.

Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Forme normalisée d'un développement limité :

$$f(a+h) = h^p(a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)), \quad a_0 \neq 0.$$

Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

Les relations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$ sont définies à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ sous l'hypothèse que $v_n \neq 0$ pour n assez grand.

Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.

Opérations algébriques sur les équivalents, puissances.

Si les suites réelles $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ vérifient $u_n \leq v_n \leq w_n$, pour n assez grand, et si $u_n \sim w_n$ alors $u_n \sim v_n$.

Signe, limite.

Notations $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$ et $f(x) \sim (g(x))$, $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Les relations $f(x) = o(g(x))$ et $f(x) \sim (g(x))$ sont définies à partir du quotient $\frac{f}{g}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a .

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.

Équivalence $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$; signe de f au voisinage de a .

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Utilisation de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement.

Les élèves doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.

La division selon les puissances croissantes est hors programme.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de TAYLOR-YOUNG : développement limité à l'ordre n en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$; de $\arctan$ et de $\tan$ à l'ordre 3.

Utilisation des développements limités à l'étude locale d'une fonction (prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement, etc.) et pour préciser l'allure d'une courbe au voisinage d'un point.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local.

Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.

Les élèves doivent être capables de lever une forme indéterminée, calculer des équivalents et des limites, déterminer la position relative d'une courbe et de sa tangente, déterminer des asymptotes.

La notion de développement asymptotique est présentée sur des exemples simples. La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

3.3 Espaces vectoriels

Cette section généralise les objets de la géométrie du plan et de l'espace : vecteurs, bases, droites, plans... ; elle a aussi pour objectif de définir la notion de dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie et en présente plusieurs méthodes de calcul. Elle est organisée autour des axes suivants :

- *étudier les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire. On insiste sur les méthodes pratiques de calcul de dimension en faisant apparaître qu'elles reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace vectoriel, description d'un sous-espace vectoriel par des équations linéaires.*

Lors de cette étude, on fera usage de nombreuses figures et on soulignera comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- *aient assimilé les notions d'espace vectoriel et les procédés usuels de leur construction ;*
- *sachent reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser à l'aide des notions d'espace vectoriel ;*

- connaissent les conséquences du théorème de la base incomplète (définition de la dimension, théorème du rang) ;
- maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un problème (en termes de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique (en termes d'équations linéaires etc.) et vice versa ;
- soient capable, au moyen de l'algorithme de GAUSS, de déterminer un rang, d'extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs (base extraite), de compléter une famille libre en une base (base incomplète).

Dans toute la section, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.3.1 Généralités sur les espaces vectoriels

Notion d'espace vectoriel

Structure de $\mathbb{K}$ –espace vectoriel.

Espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Espace vectoriel E^A des fonctions d'un ensemble non vide A dans un espace vectoriel E .

Cas particulier des espaces vectoriels $\mathbb{K}^A$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Produit d'une famille finie de $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels.

Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

Les élèves doivent savoir passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.

Notion de sous-espace vectoriel

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.

Sous-espace nul. Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.

Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.

Cas de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

Sous-espace vectoriel engendré par famille finie $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs.

Notations $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$, $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Notations $F + G$, $F \oplus G$.

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Caractérisation de la somme directe par l'unicité de l'écriture.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Les élèves doivent prendre l'habitude de se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

Familles finies de vecteurs d'un espace vectoriel

Vecteurs colinéaires.

Familles génératrices, libres, liées ; indépendance et dépendance linéaire d'une famille finie de vecteurs.

Ajout d'un vecteur à une famille libre.

Indépendance d'une famille finie de polynômes non nuls de degrés échelonnés.

Base, coordonnées.

Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathcal{B}$.

Base adaptée à une somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$.

Bases formées de polynômes de degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , alors les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.

3.3.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Existence de bases

Un espace vectoriel est dit fini-dimensionnel (ou de dimension finie) s'il possède une famille génératrice finie.

Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre, où $I \subset \{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie $J \subset \{1, \dots, n\}$, contenant I telle que $(x_i)_{i \in J}$ soit une base de E .

Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.

Existence de bases d'un espace vectoriel fini-dimensionnel.

Utilisation de l'algorithme de GAUSS pour extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs et pour compléter une famille libre en une base.

Notion de dimension

Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie. Exemples de calcul de la dimension.

Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dimensions de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 résolue en y' , de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace vectoriel de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.

Une famille de n vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre ; si, et seulement si, elle est génératrice.

Dimension et sous-espace vectoriel

Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, cas d'égalité.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Formule de Grassmann.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire.

Base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Dimension commune des supplémentaires.

Notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Les élèves doivent être capables de majorer le rang d'une famille de vecteurs en exhibant une relation linéaire, de le minorer en exhibant une sous-famille libre et d'utiliser le rang d'une famille de vecteurs pour démontrer qu'elle est libre ou génératrice.

3.4 Applications linéaires

L'étude des applications linéaires suit naturellement celle des espaces vectoriels ; son objectif est de fournir un cadre aux problèmes linéaires.

Lors de cette étude, on fera usage de nombreuses figures et on soulignera comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- aient assimilé les notions d'espace vectoriel et d'application linéaire, et les procédés usuels de leur construction ;
- sachent reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;
- maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un problème (en termes d'applications linéaires, de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique (en termes d'équations linéaires, de matrices, etc.) et vice versa ;
- soient capable, au moyen de l'algorithme de GAUSS, de déterminer un rang, d'inverser une matrice carrée ;
- maîtrisent le « théorème du rang » dans différentes formulations.

Dans toute la section, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.4.1 Généralités sur les applications linéaires

Application linéaire.

Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition.

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

Bilinéarité de la composition.

Isomorphismes, réciproque.

Une application linéaire de E dans F est un isomorphisme si, et seulement si, elle transforme une (toute) base de E en une base de F .

Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

Image et noyau d'une application linéaire.

Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(\{u(x_i), i \in I\})$.

Image d'une base par un isomorphisme.

Notations $\text{Im}(u)$, $\text{Ker}(u)$ ou plus simplement $\text{Im } u$, $\text{Ker } u$.

Endomorphismes.

L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est un espace vectoriel ; il est stable par la composition des applications ; non commutativité de la composition dans $\mathcal{L}(E)$ si E n'est pas de dimension ≤ 1 .

Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, notation vu pour la composée $v \circ u$; notation u^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exemples d'endomorphismes : Identité, homothéties.

Notations id_E , $\lambda \cdot \text{id}_E$.

Définition géométrique d'une projection ou projecteur, d'une symétrie.

Les élèves doivent prendre l'habitude de se représenter ces notions de projection et de symétrie par une figure en dimension 2 et 3.

Caractérisation par $p^2 = p$ ou $s^2 = \text{Id}_E$.

Automorphismes. Groupe linéaire.

Notation $\text{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

3.4.2 Applications linéaires et dimension finie

Application linéaire de rang fini.

Notation $\text{rg}(u)$.

Inégalité $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

Détermination d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base.

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , de dimension finie, et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .

Classification, à isomorphisme près, des espaces vectoriels de dimension finie par leur dimension.

Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

Pour un endomorphisme en dimension finie, équivalence entre inversibilité, inversibilité à gauche et inversibilité à droite.

Si E et F sont de dimension finie, il en est de même pour $\mathcal{L}(E, F)$.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces supplémentaires de E , et si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .

Forme géométrique du théorème du rang : Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$.

Théorème du rang.

Notion d'équation linéaire : on appelle ainsi toute équation de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $a \in F$ et $x \in E$ est l'inconnue.

Structure des solutions, condition de compatibilité, lien avec $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de même dimension finie, alors u est bijective si, et seulement si, u est injective, si, et seulement si, u est surjective. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie, alors u est inversible si, et seulement si, u est inversible à gauche si, et seulement si, u est inversible à droite.

Formule $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est de rang finie et $\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$. Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithméticogéométriques.

L'équation linéaire $u(x) = a$ est compatible si, et seulement, si $a \in \text{Im}(u)$. L'ensemble des solutions d'une telle équation est soit vide (si $a \notin \text{Im}(u)$), soit de la forme $x_0 + \text{Ker } u = \{x_0 + y; y \in \text{Ker } u\}$, x_0 étant une solution particulière.

La notion de sous-espace affine d'un espace vectoriel est hors programme en TSI1.

3.5 Représentations matricielles

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;
- étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et d'un vecteur.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- sachent représenter matriciellement une famille finie de vecteurs ou de formes linéaires et une application linéaire dans une base donnée et utiliser les formules de changement de bases ;
- maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un problème (en termes d'applications linéaires, de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique (en termes d'équations linéaires, de matrices, etc.) et vice versa ;
- soient capables, au moyen de l'algorithme de GAUSS, de déterminer le rang d'une matrice ou d'une application linéaire ;

– maîtrisent le « théorème du rang » dans différentes formulations.

3.5.1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base e , d'une application linéaire u dans un couple (e, f) de bases, d'un endomorphisme v dans une base e .

Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.

Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.

Matrice d'une composée d'applications linéaires.

Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Notation $Mat_{e,f}(u)$, $Mat_e(v)$.

Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$, de la similitude $z \mapsto (a+ib)z$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Expression des coordonnées de $u(x)$ en fonction de celles de x .

Notations $u \mapsto Mat_{e,f}(u)$ et $v \mapsto Mat_e(v)$.

Cas particulier des endomorphismes.

Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.

3.5.2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice ; rang d'une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Noyau, image et rang d'une matrice.

Une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si, et seulement si, ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si, et seulement si, son rang vaut n .
Lien entre les diverses notions de rang.

Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.

On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.

Notations $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$. Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.

Équations de l'image et du noyau de A ; on utilise l'échelonnement d'un système pour déterminer des équations de l'image.

Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure/inférieure est une matrice triangulaire supérieure/inférieure.

3.5.3 Retour sur les systèmes linéaires

Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice.

Le système $AX = B$ est compatible si, et seulement si, B appartient à l'image de A .

Si la matrice A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.

Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.

Structure de l'ensemble des solutions.

Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

Une autre formulation du théorème du rang : Le rang de A , défini comme le nombre de pivots d'une matrice échelonnée qui lui est équivalente par lignes, est également le rang de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$ ou, de manière équivalente, le rang de l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associée.

Application : calcul du rang.

Le rang d'un système d'équations linéaires homogènes est égal au rang de sa matrice, l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à p inconnues de rang r est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - r$.

On admet que le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes (ie le rang de sa transposée).

3.5.4 Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre.

Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.

Effet d'un changement de base sur la matrice des coordonnées d'un vecteur.

Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.

Matrices semblables.

La matrice de passage $P_{e'}^e$ de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e . L'inverse de $P_{e'}^e$ est $P_e^{e'}$.

Base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

Exemples de recherche d'un couple de bases dans lequel la matrice d'une application linéaire donnée est simple.

Exemples de recherche d'une d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

Interprétation géométrique.

Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

3.6 Intégration des fonctions continues sur un segment

Dans cette section, Il s'agit de donner une construction rigoureuse de l'intégrale d'une fonction, réelles ou complexes, continue sur un segment en partant de sa définition comme une aire. Ses propriétés élémentaires sont établies, et notamment le lien entre intégration et primitivation. Ceci permet aussi de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral.

La notion de continuité uniforme étant hors programme de PCSI, le théorème sur l'approximation d'une fonction continue sur un segment par une fonction en escalier est établi en ayant recourt à l'axiome de la borne supérieure.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves :

- soient capables de mener des calculs d'intégrales et de primitives dans des cas usuels ;*
- puissent mettre en pratique, sur des exemples simples, les techniques d'intégration par parties et de changement de variable ;*

- aient une connaissance à la fois théorique et pratique des principales inégalités (inégalités des accroissements finis et de TAYLOR-LAGRANGE, inégalité triangulaire, etc.).

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour la construction de l'intégrale, on commence par traiter d'abord le cas réel avant de procéder à une brève extension.

Subdivision d'un segment, pas de la subdivision.

Fonction en escalier, fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Approximation d'une fonction continue sur un segment par une fonction en escalier : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur $[a, b]$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [a, b]$.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parvient ainsi à construire un couple de fonctions en escalier qui encadrent f à ε près sur $[a, b]$. Une représentation graphique des fonctions est éclairante, en vue notamment de l'interprétation de l'intégrale en termes d'aire.

Intégrale d'une fonction φ en escalier sur un segment $[a, b]$. Propriétés usuelles : linéarité, additivité et positivité de l'intégrale. Inégalité triangulaire.

Intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: C'est par définition la valeur commune de $\sup \{ \int_{[a,b]} \varphi ; \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \}$ et de $\inf \{ \int_{[a,b]} \psi ; \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), f \leq \psi \}$, quantités dont on montre qu'elles existent et sont égales grâce au résultat d'approximation.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Propriétés usuelles : Linéarité, additivité et positivité de l'intégrale. L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si, et seulement si, la fonction est nulle.

Relation de CHASLES.

Sommes de RIEMANN : si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Notations $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Structure vectorielle ; stabilité par le produit et le passage au module des ensembles $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

On peut montrer cette propriété en appliquant le principe de la borne supérieure et le fait que f possède une limite à droite en tout point de l'intervalle $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de l'intervalle $]a, b]$: Considérer l'ensemble $\Gamma = \{c \in [a, b] ; \exists \varphi \in \mathcal{E}([a, c], \mathbb{K}), \forall t \in [a, c], |f(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon\}$; cet ensemble est non vide (il contient a) et est majoré par b ; il admet donc une borne supérieure γ dans $[a, b]$. Il est en fait évident que Γ est l'un des intervalles $[a, \gamma[$ ou $[a, \gamma]$; établir le résultat d'approximation revient à montrer que $\gamma \in \Gamma$ et que $\gamma = b$.

Notations $\int_{[a,b]} \varphi$, $\int_a^b \varphi$, $\int_a^b \varphi(t) dt$.

$$\left| \int_{[a,b]} \varphi \right| \leq \int_{[a,b]} |\varphi|.$$

Se placer d'abord dans le cas où la fonction f est réelle et l'encadrer à ε près par deux fonctions en escalier φ et ψ de sorte que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$, puis illustrer l'approximation à l'aide d'un graphique ; envisager ensuite de définir l'intégrale d'une fonction complexe à l'aide de sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Valeur moyenne d'une fonction en escalier ou continue sur un segment.

Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$. Propriétés correspondantes.

Interprétation géométrique dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Inégalité triangulaire.

Dérivabilité de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Théorème fondamental du calcul intégral. : Toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive.

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|.$$

f étant une fonction continue sur I et $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I ; c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a . De plus, pour toute primitive G de f ,

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I.$$

Inégalité des accroissements finis.

Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$ alors

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f'|$$

Formules d'intégration par parties.

Application : Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, formule de TAYLOR (à l'ordre n) avec reste sous forme d'intégrale; inégalité de TAYLOR-LAGRANGE.

Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

On soulignera la différence de nature entre la formule de TAYLOR-YOUNG (locale) et les formules de TAYLOR globales (reste intégral et inégalité de TAYLOR-LAGRANGE).

Formule de changement de variable.

Application : intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0; l'intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période est constante.

Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I ,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Exemples de calcul d'intégrales et de primitives.

Pour ce qui est du calcul des primitives, le seul exposé systématique concerne les fonctions rationnelles (dans des cas simples); il utilise la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Parmi les exemples à traiter figurent la primitivation des polynômes trigonométriques par linéarisation, l'utilisation du paramétrage rationnel de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ pour ramener l'intégrale d'une fraction rationnelle en sinus et cosinus à celle d'une fonction rationnelle et le calcul des intégrales de WALLIS.

Intégration numérique : étude et comparaison des méthodes des rectangles et des trapèzes.

On présentera un algorithme associé à la méthode des trapèzes (à programmer en Python) en soulignant l'intérêt des subdivisions dichotomiques ; on admettra que pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, l'erreur est un $O(1/n^2)$, n désignant le nombre de points de la subdivision.

3.7 Dénombrement

Cette section a pour but de présenter les bases du dénombrement et une initiation aux techniques élémentaires de la combinatoire, notamment en vue de l'étude des probabilités. C'est aussi l'occasion d'aborder les coefficients binomiaux sous un autre angle que celui de la section « Compléments de calcul algébrique » ; l'objectif est de consolider les acquis du secondaire qualifiant.

On introduit sans formalisation excessive la notion de cardinal et on peut admettre sans démonstration les propriétés les plus intuitives.

L'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

Cardinal d'un ensemble fini.

Notations $|A|$, $\text{Card}(A)$, $\#A$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si, et seulement si, elle est injective, si, et seulement si, elle est surjective.

Cardinal de la réunion disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, cardinal de leur différence.

Cardinal du complémentaire d'un ensemble fini.

Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n .

Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n .

La formule du crible est hors programme.

Les élèves doivent être capables de reconnaître des situations relevant de ce cadre.

Interprétation combinatoire des propriétés
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Démonstrations combinatoires des formules de PASCAL et du binôme.

3.8 Probabilité sur un univers fini

L'objectif de cette première approche est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficultés techniques majeures. Les situations et les concepts utilisés sont nécessairement simples, ne faisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques élémentaires.

Dans ce cadre, l'étude du cas fini lors de cette deuxième période permettra de consolider les acquis de la classe terminale du secondaire qualifiant, et de mettre en place les concepts probabilistes de base en restreignant l'étude à un univers Ω fini, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

Cette section a pour objectifs de :

- revoir et consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini et aux variables aléatoires définies sur un tel univers ;*
- donner des outils permettant de modéliser et d'aborder, sur des exemples simples, l'étude des situations concrètes où le hasard intervient ;*
- présenter les premières notions relatives aux variables aléatoires finies.*

Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des élèves.

Cette partie s'appuie sur la section consacrée au dénombrement et elle a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Elle se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines. On pourra faire travailler les élèves sur des marches aléatoires ou des chaînes de MARKOV en temps fini, sur des permutations aléatoires (loi uniforme sur S_n), des graphes aléatoires, des inégalités de concentration etc.

L'utilisation de l'outil informatique est fortement recommandée pour illustrer les situations probabilistes, pour simuler des variables aléatoires et expérimenter sur des problèmes réels correctement modélisés.

3.8.1 Espace probabilisable fini

Expérience aléatoire ; issues (ou résultats observables) d'une expérience aléatoire.

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers et noté Ω .

Dans toute la section, Ω est un ensemble fini non vide et on appelle événement tout sous-ensemble de Ω .

L'ensemble des issues est Ω , l'ensemble des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$; le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle espace probabilisable.

Proposer des situations simples et concrètes où le hasard intervient, proposer une modélisation mathématique.

Un événement est à priori une assertion dont la véracité dépend du résultat de l'expérience. Les issues (ou aléas) qui la rendent vraie forment un sous ensemble de Ω , qu'on peut identifier à l'événement.

Opérations sur les événements : événement contraire $\overline{A}$, événement A et B , événement A ou B , événement certain, événement impossible.

Des événements sont dits incompatibles quand ils ne peuvent se réaliser simultanément.

Système complet d'événements : famille de sous ensembles deux à deux incompatibles et dont la réunion est Ω ; c'est-à-dire formant une partition de Ω .

Lien avec les connecteurs logiques : le contraire d'un événement est au niveau logique sa négation et au niveau ensembliste son complémentaire. La conjonction d'événements correspond au connecteur logique « et » ainsi qu'à l'opération ensembliste $\cap$. Pour la disjonction c'est « ou » et $\cup$.

Pour deux événements A et B , cela signifie que $A \cap B = \emptyset$. Pour une famille de plus de 2 événements, distinguer « incompatibles » de « incompatibles deux à deux ».

Une famille $(A_i)_{i \in I}$, où I est une partie finie de $\mathbb{N}$, est un système complet d'événements si elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset, \\ \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega. \end{cases}$$

3.8.2 Espace probabilisé fini

Une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ (avec Ω fini) est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0, 1]$ qui est additive et vérifie $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Une probabilité est déterminée par la famille $(\mathbb{P}(\{w\}))_{w \in \Omega}$, famille finie de réels positifs ayant pour somme 1. On a $\mathbb{P}(A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(\{a\})$.
Formule du crible de POINCARÉ.

La probabilité d'un événement A est le taux de chance de voir A se réaliser.

L'additivité signifie : pour tous A et B incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On en déduit que $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ pour toute famille $A_1, \dots, A_n$ d'événements incompatibles deux à deux.

Cas de l'équiprobabilité.

Pour la formule de POINCARÉ on peut se limiter au cas de deux ou trois événements.

3.8.3 Probabilité conditionnelle, indépendance

On tâchera de donner de nombreux exemples d'utilisation des formules de ce paragraphe.

Si B est un événement de probabilité $\mathbb{P}(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \cap B) / \mathbb{P}(B)$.

L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
Formule des probabilités composées.

Illustrer cette notion par des situations de la vie courante.

La notation $\mathbb{P}(A|B)$ est utilisée parfois à la place de $\mathbb{P}_B(A)$.

Si $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$, alors
 $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdots \mathbb{P}_{\cap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)$.

Formule des probabilités totales : si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements, alors pour tout événement B on a $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i)$.

Formule de BAYES :

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_i \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$$

Indépendance de deux événements.

Indépendance mutuelle d'événements.

Si n événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i , avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

Éliminant les A_i de probabilité 0, c'est aussi $\sum_i \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$.

$A_1, \dots, A_n$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et on suppose $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$. Cette notion est relative à la probabilité.

Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits (mutuellement) indépendants si, pour toute partie J de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(\cap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$.

Noter que l'indépendance des A_j implique l'indépendance deux à deux et que la réciproque est fausse.

3.8.4 Variables aléatoires réelles

On introduit ici la notion de variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Ces variables aléatoires sont alors à valeurs dans un ensemble fini, ce qui simplifie les démonstrations des formules.

Notion de variable aléatoire.

On appelle variable aléatoire réelle toute application X de Ω vers $\mathbb{R}$.

Par abus, on écrit $\{X \in H\}$ ou $(X \in H)$ ou $[X \in H]$ à la place de $X^{-1}(H) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in H\}$. On adoptera aussi les notations habituelles telles que $[X = x]$, $[X \leq x]$ ou $(X = x)$, $(X \leq x)$ ou $\{X = x\}$, $\{X \leq x\}$.

Système complet associé à une variable aléatoire.

Loi $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire X .

La donnée de $X(\Omega)$ et des probabilités correspondantes constitue la loi de X dans le cas fini.

$\mathbb{P}_X$ est la probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ définie par $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{X \in A\})$; elle est déterminée par la donnée des $\mathbb{P}(\{X = x\})$, pour tout x élément de $X(\Omega)$.

Fonction de répartition F_X associée à la variable aléatoire X , définie par $F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(\{X \leq x\})$.

Propriétés d'une fonction de répartition pour Ω fini.

C'est une fonction en escalier sur $\mathbb{R}$. Les sauts de cette fonction caractérisent l'image $X(\Omega)$ ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(\{X = x\})$ pour $x \in X(\Omega)$. La fonction de répartition caractérise la loi.

Somme de deux variables aléatoires. Variable aléatoire $Y = f(X)$, composée d'une variable aléatoire réelle X par une fonction f , définie sur un domaine contenant $X(\Omega)$.

On écrit $f(X)$ au lieu de $f \circ X$ et on se limitera à des cas simples, tels que $f(x) = ax + b$, $f(x) = x^2, \dots$

Espérance et variance d'une variable aléatoire

L'espérance de X est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(\{X = x\}). \quad (*)$$

Propriétés de $\mathbb{E}$: positivité, linéarité, croissance.

Théorème de transfert : espérance de $f(X)$.

Cas d'une transformation affine :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes.

Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite centrée.

La variance de X est $V(X) = \mathbb{E}((X - m)^2)$ où $m = \mathbb{E}(X)$. L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance 1 est dite centrée réduite.

Transformation affine

Variables aléatoires de lois usuelles

Loi certaine.

Loi de Bernoulli de paramètre p , $p \in [0, 1]$. Espérance, variance. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.

Loi binomiale de paramètres n, p , $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Espérance, variance.

Loi uniforme sur un segment d'entiers $\llbracket m, n \rrbracket$. Espérance, variance.

C'est une moyenne pondérée des valeurs de X .

On a aussi : $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$. $(**)$

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Utiliser $(**)$ pour les démonstrations.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(\{X = x\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\}). \end{aligned}$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

On note $\tilde{X}$ la variable centrée $X - \mathbb{E}(X)$.

Formule de KOENIG-HYUGENS :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

On note X^* la variable aléatoire centrée réduite $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ lorsque $\sigma(X) \neq 0$.

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Interprétation : épreuve aléatoire à deux issues, succès avec probabilité p vs échec avec probabilité $q = 1 - p$.

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Interprétation : nombre de succès lors de n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli. On fera le lien avec la formule du binôme de Newton et les propriétés des coefficients binomiaux.

Application, à l'étude de la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$, où $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$.

Table des matières

1	Préambule	1
1.1	Objectifs généraux de formation	1
1.2	Organisation du texte du programme	3
1.3	Contenu du programme	3
1.4	Organisation temporelle de la formation	5
1.5	Recommandations pédagogiques pour le choix d'une progression	5
2	Première période	7
2.1	Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement	7
2.2	Nombres complexes : calculs algébriques et applications géométriques	8
2.3	Compléments de calcul algébrique	10
2.3.1	Sommes et produits de nombres complexes	10
2.3.2	Systèmes linéaires en petite dimension	11
2.4	Géométrie élémentaire du plan et de l'espace	12
2.4.1	Cas du plan	12
2.4.2	Cas de l'espace	13
2.5	Nombres réels et suites numériques	14
2.5.1	Nombres réels	14
2.5.2	Suites numériques	15
2.6	Fonctions de la variable réelle, limites et continuité	17
2.6.1	Généralités sur les fonctions	17
2.6.2	Limites et continuité	17
2.7	Fonctions de la variable réelle, dérivation	19
2.7.1	Fonctions dérivables	19
2.7.2	Suites récurrentes	20
2.8	Fonctions usuelles, fonctions convexes	20
2.8.1	Généralités sur l'étude d'une fonction	21
2.8.2	Fonctions usuelles	21
2.8.3	Fonctions convexes	21
2.9	Primitives et équations différentielles linéaires	22
2.9.1	Calcul de primitives	22
2.9.2	Équations différentielles linéaires	23
2.10	Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires	25
2.10.1	Calcul matriciel	25
2.10.2	Systèmes d'équations linéaires	26

3 Deuxième période	30
3.1 Polynômes et fractions rationnelles	30
3.2 Développements limités, calcul asymptotique	31
3.3 Espaces vectoriels	33
3.3.1 Généralités sur les espaces vectoriels	34
3.3.2 Espaces vectoriels de dimension finie	35
3.4 Applications linéaires	36
3.4.1 Généralités sur les applications linéaires	36
3.4.2 Applications linéaires et dimension finie	37
3.5 Représentations matricielles	38
3.5.1 Matrice d'une application linéaire dans des bases	39
3.5.2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice ; rang d'une matrice .	39
3.5.3 Retour sur les systèmes linéaires	39
3.5.4 Changements de bases	40
3.6 Intégration des fonctions continues sur un segment	40
3.7 Dénombrement	43
3.8 Probabilité sur un univers fini	44
3.8.1 Espace probabilisable fini	44
3.8.2 Espace probabilisé fini	45
3.8.3 Probabilité conditionnelle, indépendance	45
3.8.4 Variables aléatoires réelles	46