

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DU PLAN

Vous avez vu en première année du collège (vous en souvenez-vous?) la notion de droite « graduée » ainsi que le repérage dans le plan. Des détails supplémentaires étaient rapportés en 3ème année du collège concernant les coordonnées d'un point, d'un vecteur, du milieu d'un segment ... Ensuite, après avoir grandi un petit peu, vous avez étudié quelques propriétés du produit scalaire en tronc commun ainsi que quelques transformations usuelles du plan. En parallèle, avec l'énoncé du principe d'inertie en mécanique, vous avez découvert la notion de **centre d'inertie** d'un système de points matériels, avant de la généraliser à la notion de **barycentre** en mathématiques, en première année du baccalauréat. Sans omettre les différentes applications rencontrées en sciences de l'ingénieur.

Dans ce chapitre, après avoir rafraîchi votre mémoire sur les repères cartésiens et polaires, nous introduirons deux outils essentiels de la géométrie plane : le produit scalaire et le déterminant. Le produit scalaire permet de caractériser l'orthogonalité entre deux vecteurs, tandis que le déterminant permet de tester leur colinéarité. Nous étudierons leurs propriétés algébriques (bilinéarité, symétrie ou antisymétrie) ainsi que leurs applications géométriques (projections, calcul d'aires). Nous nous pencherons ensuite sur l'étude des droites et des cercles dans le plan. Nous établirons leurs différentes équations : cartésiennes et paramétriques (qui décrivent en fait la trajectoire d'un point mobile le long de la droite ou du cercle, appelées en physique « équations horaires du mouvement »). Enfin, nous donnons les expressions analytiques de quelques transformations usuelles du plan.

1. Repérage dans le plan

1.1 Base et repère cartésien

Définition 1 .

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha \vec{u}$.

Exemple 1 .

- Si $\vec{u} = 5\vec{v}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

Définition 2 .

- On appelle **base (du plan)** tout couple $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont deux vecteurs du plan non colinéaires.
- On appelle **repère (cartésien) (du plan)** tout triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où O est un point du plan et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base du plan.

Proposition 1 .

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base du plan si et seulement si :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = 0$$

Démonstration**Proposition et Définition 1 .**

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère cartésien du plan.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Alors, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

On l'appelle le **couple des coordonnées (cartésiennes)** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On note alors :

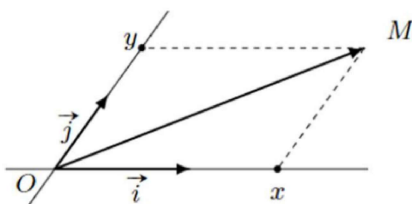
$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u}(x, y).$$

- Soit M un point du plan. Les coordonnées (x, y) du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont appelées **les coordonnées (cartésiennes)** de M dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On a donc :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

On note alors :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M(x, y).$$



Exemple 2 .

On pose : $\vec{e}_1 = (1, 1)$ et $\vec{e}_2 = (1, 2)$.

1. Justifier que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base du plan.
2. Exprimer les coordonnées de $\vec{u} = (2, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

   **Solution**

Proposition 2 .

Un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan étant fixé, soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$(x_B - x_A, y_B - y_A).$$

- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Exemple 3 .

Dans le repère usuel $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1, 2)$ et $B(3, 4)$. Donner les coordonnées du milieu de $[AB]$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   **Solution**

1.2 Repère orthonormal

Définition 3 .

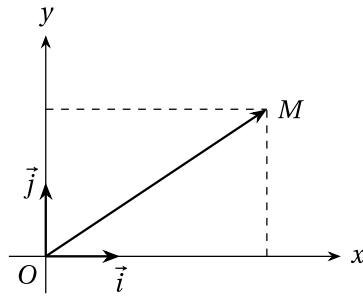
Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan. On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une :

- base **orthogonale** du plan lorsque $(\vec{i}, \vec{j}) = \pm \frac{\pi}{2}$;

- base **orthonormée** (ou orthonormale) du plan lorsque $(\vec{i}, \vec{j}) = \pm \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$;
- base **orthonormée directe** du plan lorsque $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

Définition 4 .

- On appelle repère orthonormé direct du plan tout repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec O un point du plan et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe du plan.



1.3 Repère polaire, Coordonnées polaires

Proposition et Définition 2 .

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\begin{cases} \vec{u}(\theta) &= (\cos \theta) \vec{i} + (\sin \theta) \vec{j} \\ \vec{v}(\theta) &= -(\sin \theta) \vec{i} + (\cos \theta) \vec{j} \end{cases}$$

Alors, le couple $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est une base orthonormée du plan, appelée la **base polaire** associée à θ et le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ s'appelle **repère polaire d'angle θ** .

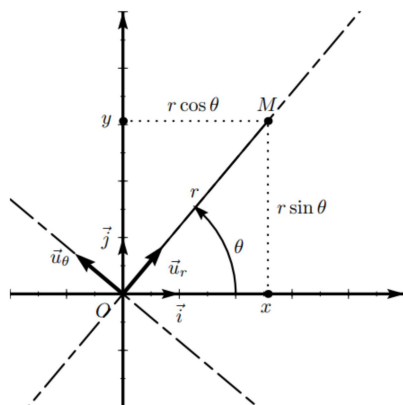


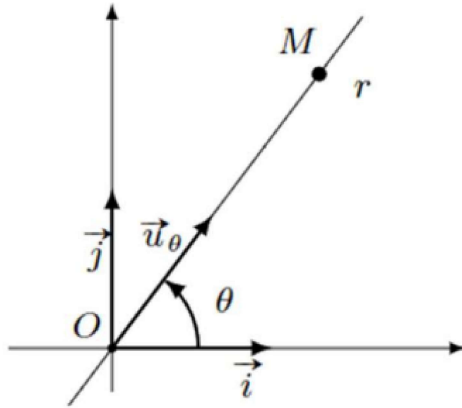
FIGURE 1 – Repère polaire avec $\vec{u}_r$ (respectivement $\vec{u}_\theta$) est $\vec{u}(\theta)$ (respectivement $\vec{v}(\theta)$) de l'énoncé.

Proposition et Définition 3 .

Un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan étant fixé. Pour tout point M du plan distinct de l'origine, il existe un couple $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}(\theta) \quad \text{avec } \vec{u}(\theta) = \cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j}.$$

Le couple (r, θ) s'appelle un **couple de coordonnées polaires** de M .

**Remarque 1 .**

On privilégie Les coordonnées polaires lorsqu'on souhaite étudier quelques mouvements circulaires dans le plan ainsi que les oscillations d'un pendule simple par exemple.

Remarque 2 .

Les coordonnées polaires d'un point donné ne sont pas uniques. Par exemple, (r, θ) et $(r, \theta + 2\pi)$ sont des coordonnées polaires d'un même point.

Remarque 3 .

« L'analogie » avec la forme trigonométrique d'un complexe non nul est à méditer!

Exemple 4 .

Un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan étant fixé, déterminer un couple de coordonnées polaires du point $M(1, 1)$.

🔗 🔗 🔗 **Solution**

Proposition 3 .

Un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan étant fixé. Soit M un point du plan distinct de l'origine de coordonnées cartésiennes (x, y) . Soient $r > 0$ et θ un réel. (r, θ) sont des coordonnées polaires de M , si et seulement si,

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta.$$

Démonstration

Remarque 4 .

- Si M est le point d'affixe $z \neq 0$, alors un couple de coordonnées polaires pour M est donné par (r, θ) où θ est un argument de z et r est le module de z .
- Avec les mêmes notations, on constate que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple 5 .

Un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan étant fixé, déterminer un couple de coordonnées polaires du point $M(-1, 1)$.

   **Solution**

2. Barycentre

Définition 5 .

On appelle **point pondéré** du plan tout couple (M, λ) où M est un point du plan et λ un réel. Le nombre λ est appelé le **poids** ou la **masse** de M .

Proposition et Définition 4 .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n$ des points du plan et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0.$$

- On appelle **barycentre** des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ l'unique point G du plan vérifiant :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = 0.$$

De plus, pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \left(\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right).$$

Ainsi, si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, (x_i, y_i) est le système des coordonnées cartésiennes de A_i , alors les coordonnées cartésiennes de G sont :

$$x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}.$$

- Si $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$ (et notamment si $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$), G s'appelle **isobary-centre** des points $A_1, \dots, A_n$ et, pour tout point M du plan, on a

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{n} (\overrightarrow{MA_1} + \dots + \overrightarrow{MA_n}).$$

De plus, si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, (x_i, y_i) est le système des coordonnées cartésiennes de A_i , alors les coordonnées cartésiennes de G sont :

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Démonstration

Exemple 6 .

Si G est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) , où $\alpha + \beta \neq 0$, alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

Exemple 7 .

Construire le barycentre G_1 des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

   **Solution**

Comme G_1 est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, on a :

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2+1} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$$



Exemple 8 .

Construire le barycentre G des points pondérés $(A, -1)$ et $(B, 3)$.

   **Solution**

Exemple 9 .

Construire l'isobarycentre de deux points A et B du plan.

   **Solution**

Proposition 4 : Associativité du barycentre.

Si G est le barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) et si H est le barycentre de (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$ alors G est le barycentre de $(H, \alpha + \beta)$ et (C, γ) .

Démonstration**Remarque 5 .**

La proposition 4 est utile pour placer le barycentre de trois points. Elle permet de trouver le barycentre de trois points à partir du barycentre de deux points; ce qui est plus simple à déterminer.

Exemple 10 .

Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 3)$.

   **Solution**

Exemple 11 .

Soit ABC un triangle. Construire l'isobarycentre des trois points A , B et C .

   **Solution**