

INTÉGRALES ET PRIMITIVES

Le but de ce chapitre est purement calculatoire; on verra plus loin que le calcul de primitives est très présent dans la résolution des équations différentielles. Une construction rigoureuse de l'intégrale sera donnée en fin d'année. Dans la suite,

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

1. Primitives d'une fonction continue

1.1 Définition et propriétés

Définition 1 .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On appelle **primitive** de la fonction f sur I toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I et vérifiant $F' = f$.

Remarque 1 .

Une primitive est dérivable par définition.

Exemple 1 .

- $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x$.
- $\ln$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Proposition 1 .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction possédant une primitive F sur I . Alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions de la forme $F + C$ où $C \in \mathbb{K}$. Autrement, si G est une primitive de f sur I alors il existe une constante $C \in \mathbb{K}$ telle que : $G = F + C$.

Démonstration

Corollaire 1 .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction possédant une primitive sur I . On se donne aussi $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la condition initiale $y_0 = F(x_0)$.

Exemple 2 .

$\ln$ est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

Notation

Étant donnée une fonction continue f , on désigne par $\int f(x)dx$, ou parfois plus simplement par $\int f$, une primitive de f . On se permet d'écrire $\int f(x)dx = g(x)$ pour simplement dire que la fonction g est une primitive de f .

Exemple 3 .

Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, on a $\int f'(x)dx = f(x)$.

Proposition 2 .

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Si F et G sont primitives de f et g sur I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est primitive de f , alors λF est une primitive de λf .

Proposition 3 .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

Si F est primitive de f , alors $\operatorname{Re}(F)$ est une primitive de $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(F)$ est une primitive de $\operatorname{Im}(f)$.

Démonstration

1.2 Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Intervalle
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$-\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + C$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
x^α avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\arctan x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$] -1, 1[$

1.3 Techniques usuelles de primitivation

Proposition 4.

Soit u une fonction dérivable sur I à valeurs dans un intervalle J et φ une fonction dérivable sur J . Alors la fonction $x \mapsto u'(x)\varphi'(u(x))$ admet la fonction $x \mapsto \varphi(u(x))$ comme primitive sur I .

Démonstration

Il suffit de remarquer que la fonction $x \mapsto \varphi(u(x))$ est dérivable sur I et de dérivée $x \mapsto u'(x)\varphi'(u(x))$.

En particulier, on a :

- $\int u'(x).u(x)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) \quad (\alpha \neq -1 \text{ et } u \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^*)$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln(|u(x)|). \quad (u \text{ étant à valeurs dans } \mathbb{R}^*)$
- $\int u'(x).e^{u(x)} dx = e^{u(x)}.$
- $\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} dx = \arctan(u(x)).$
- $\int u'(x).\cos(u(x)) dx = \sin(u(x)).$
- $\int u'(x).\sin(u(x)) dx = -\cos(u(x)).$

Exemple 4 .

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \exp(e^x + x)$.

   **Solution**

Exemple 5 .

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$.

   **Solution**

Exemple 6 .

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln^4(x)}$.

   **Solution**

Exemple 7 .

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$.

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$.

   **Solution**

Exemple 8 (Cas de $\Delta < 0$).

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

   **Solution**

Exemple 9 (Cas de $\Delta > 0$).

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

   **Solution**

Exemple 10 (Cas de $\Delta = 0$).

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{3x^2 + 6x + 3}$.

   **Solution**

1.4 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1 (Théorème fondamental de l'analyse).

Toute fonction f continue sur I admet des primitives sur I .

Exemple 11 .

La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$, mais on a montré qu'il est impossible de l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

2. Intégrale d'une fonction continue

2.1 Définition

Proposition et Définition 1 .

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, F une primitive (quelconque) de f et $a, b \in I$. Alors le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F .

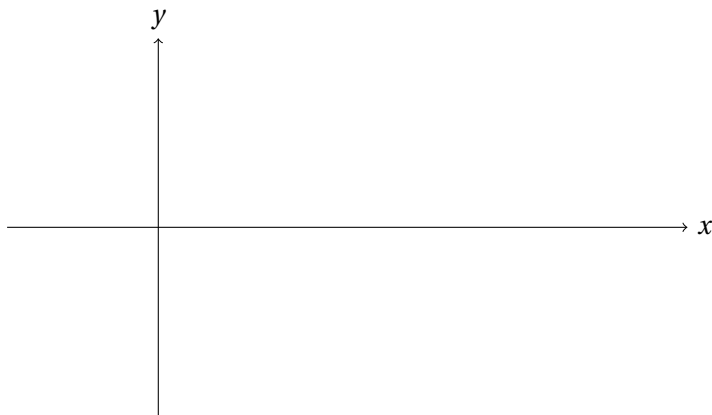
Ce nombre est appelé **l'intégrale de f de a à b** et est noté $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f$.

Démonstration**Remarque 2 .**

- La différence $F(b) - F(a)$ est notée $[F(t)]_{t=a}^{t=b}$ ou $[F]_a^b$.
- La variable t est **muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \dots$$

- Interprétation géométrique : l'intégrale de f sur $[a, b]$ représente l'aire algébrique de la région du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

**Exemple 12 .**

- Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_0^1 t^n dt =$
- $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt =$
- $\int_0^{2\pi} \sin(t) dt =$

Proposition 5 .

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et $a \in I$. Alors $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Exercice 1 (Une fonction définie par une intégrale).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^{e^x} f(t) dt \quad \text{et} \quad h(x) = \int_{x^3}^{e^x} f(t) dt$$

sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer g' et h' .

   **Solution**

2.2 Propriétés

Proposition 6 .

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues et $a, b, c \in I$.

- $\int_a^a f(t) dt = 0$.
- $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$.
- $\int_a^b f(t) + g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$.
- $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$.
- **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

Exemple 13 .

Calculer l'intégrale $\int_{-2}^2 |x - 1| dx$.

   **Solution**

Proposition 7 .

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

- **Positivité de l'intégrale** : si $\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

- **Croissance de l'intégrale** :

$$\text{si } \forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t), \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

- **Inégalité triangulaire** : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Exemple 14 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

   **Solution**

Proposition 8 .

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et **positive** sur le segment $[a, b]$.

- Si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors la fonction f est nulle sur le segment $[a, b]$:

$$\forall t \in [a, b], f(t) = 0.$$

- Si f n'est pas la fonction nulle sur le segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt > 0.$$

2.3 Intégration par parties

Définition 2 .

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est de **classe $\mathcal{C}^1$** sur I si elle est dérivable sur I et f' est continue sur I .

Théorème 2 (Intégration par parties).

Soient $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a, b \in I$.

- Version intégrale :

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt.$$

- Version primitive : sur l'intervalle I , on a

$$\int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) dx.$$

Démonstration

Exemple 15 .

Calculer l'intégrale $\int_0^1 (t+1) e^t dt$.

   **Solution**

Exemple 16 .

En utilisant une double IPP calculer l'intégrale $\int_0^\pi e^t \cos(t) dt$.

   **Solution**

Exemple 17.

Déterminer une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   **Solution**

Exemple 18.

Déterminer une primitive de la fonction $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.

   **Solution**

2.4 Changement de variable

Théorème 3 (Changement de variable).

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, $\varphi : J \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in J$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

On dit qu'on a fait le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Démonstration

Méthode du changement de variable

Pour calculer $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$ en utilisant le changement de variable :

- On pose $x = \varphi(t)$.
- On a alors $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, puis $dx = \varphi'(t)dt$.
- On détermine les bornes de la nouvelle intégrale : Lorsque t varie entre a et b , $x = \varphi(t)$ varie entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
- On vérifie que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Exemple 19 .

Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$ en posant $x = e^t$.

   **Solution**

Exemple 20 .

Calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \sin(t)$.

   **Solution**

2.5 Cas particuliers : Périodicité, parité et imparité

Proposition 9 .

Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur $[-a, a]$.

(i) Si f est **paire**, alors :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

(ii) Si f est **impaire**, alors :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0.$$

Proposition 10 .

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **périodique** de période $T > 0$ alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

Démonstration**Exemple 21 .**

Calculer les intégrales $\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2} dx$ et $\int_{-2}^2 x^2 dx$

   **Solution**