TD : Polynômes

1 Pour s'échauffer

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$: $\begin{cases} x+y+z=1, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, \\ xyz=-4. \end{cases}$

Exercice 2

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. X^4-1,
2. X^5-1,
3. X^4+X^2+1.

Exercice 3

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P(X)=1-X+\frac{X(X-1)}{2!}-\frac{X(X-1)(X-2)}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)}{n!}.$$

Exercice 4

1. Montrer que X^5-1 et X^2+X+1 sont premiers entre eux.
2. Déterminer explicitement une relation de Bezout entre X^5-1 et X^2+X+1.

Exercice 5

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et $a,b\in\mathbb{K}$. Soient r et s dans $\mathbb{K}$ les restes de la division de P par $(X-a)$ et par $(X-b)$, respectivement. Quel est le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$?

Exercice 6

Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$, où $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 7

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère le polynôme

$$P_n(X)=1+X+\frac{X^2}{2!}+\cdots+\frac{X^n}{n!}$$

Montrer qu'il n'a pas de racine multiple.

Exercice 8

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$. Montrer que α est racine au moins double de P si et seulement si α est une racine de $P\wedge P'$.

Exercice 9

Trouver les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

1. $P(X^2)=P(X)$
2. $P(X+1)=XP(X)$

2 Oraux, classiques et quelques écrits

Exercice 10

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non constant tel que :

$$(E) : P(X^2)=P(X)P(X-1).$$

1. Montrer que les racines de P sont de module 1.
2. Déterminer les polynômes solutions de (E).

(Oral-X)

Exercice 11
Soient $n \geq 2$ et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que si un nombre complexe ξ est racine de P alors
$$|\xi| \leq \max\left(1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\right).$$
2. Montrer que si un nombre complexe ξ est racine de P alors
$$|\xi| \leq 1 + \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|.$$

(Classique : Localisation des racines.)

Exercice 12
Soit P un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 2$.

1. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}[X]$.
2. On note $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients successifs nuls parmi les $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$.
3. Si un polynôme complexe P de degré $n \geq 2$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, P' est-il scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$?

(Oral-Mines)

Exercice 13

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
2. Calculer T_0, T_1, T_2, T_3.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$
4. Calculer le coefficient dominant de T_n puis en donner une factorisation, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est à coefficients entiers.

(Classique : Polynômes de Tchebychev)

Exercice 14
Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par :
$$L_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$ et en déduire la parité de L_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n(X)$ est scindé à racines simples dans $]-1,1[$. (On pourra faire une récurrence et appliquer le théorème du Rolle.)

(Classique : Polynômes de Legendre)

Exercice 15
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit le k-ème polynôme de Hilbert suivant : $P_k(X) = \frac{1}{k!} \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$.

Montrer que : $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}, \quad P_k(n) \in \mathbb{Z}$.

(Oral-X)

Exercice 16
Soient $n \geq 2$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme unitaire de degré n. On pose :
$$\Delta(P) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1, k \neq i}^{n} (z_i - z_k).$$

1. Montrer que : $\Delta(P) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{k=1}^{n} P'(z_k)$.
2. Calculer $\Delta(P)$ lorsque $P = X^2 + bX + c$, où b et c sont des complexes.
3. Exprimer en fonction de n le nombre $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j)^2$, où $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont les racines du polynôme $P = X^n - 1$.

(Écrit-X)

Exercice 17

1. Le polynôme $X^4 + 4$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$?
2. En déduire les entiers naturels n tels que $n^4 + 4$ est premier.

(Oral-Mines)

Exercice 18
Soient $B \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire de degré $m \geq 1$ et $A \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer qu'il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ uniques et tels que

$$A = BQ + R \quad \text{avec } \deg R < m.$$

Indication : On pourra faire une preuve par récurrence sur le degré de A.

Exercice 19
Soit n un entier naturel non nul.
On note U_n l'ensemble des racines n-ième de l'unité et U_n^* l'ensemble des racines de l'unité d'ordre exactement n. Enfin, pour $d \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\Phi_d = \prod_{z \in U_d^*} (X - z).$$

1. Prouver que $U_n = \bigsqcup_{d|n} U_d^*$.
2. En déduire que
$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d.$$
3. Donner l'expression de Φ_1, Φ_2 et Φ_3.
4. Démontrer que Φ_n est un polynôme à coefficients entiers.

(Classique, Écrit-X : Polynômes cyclotomiques)

Exercice 20

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$.

De plus, si $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \neq 0$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons $S_{-k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^k}$.

1. Exprimer S_2 en fonction des $(\sigma_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$(il s'agit des fonctions symétriques élémentaires définies en cours dans les formules de Viète.)
2. Calculer $S_{-1}(P) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ si (x_1, x_2, x_3, x_4) sont les racines de $P = 2X^4 - 5X^3 + 6X + 1$.

(Classique : Sommes de Newton)

Exercice 21

Un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$ $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ est dit réciproque si $a_i = a_{d-i}$ pour $0 \leq i \leq d$. Par exemple $X^2 - 2X + 1$ ou $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sont réciproques

1. Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré d est réciproque si et seulement si $X^d P\left(\frac{1}{X}\right) = P$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire réciproque. Montrer que si $x \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $x \neq 0$ et $1/x$ est une racine de P, avec la même multiplicité.
3. Prouver que le produit de deux polynômes unitaires réciproques est réciproque.

(Écrit-X)

Exercice 22
Soit p un nombre premier. On désigne par $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On admet les résultats suivants :

- $\mathbb{F}_p[X]$ est intègre.
- Le théorème de factorisation en facteurs irréductibles vu dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ a son « analogue » dans $\mathbb{F}_p[X]$.
- À partir de la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{F}_p$, on obtient un morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]$ appelé réduction modulo p. Il s'agit de l'application qui à un polynôme $\displaystyle\sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ associe $\displaystyle\sum_{0 \leq k \leq n} \overline{a_k} X^k \in \mathbb{F}_p[X]$.

1. On dit qu'un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X]$ est primitif si le pgcd de ses coefficients est égal à 1.
   Montrer que le produit de deux polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[X]$ est primitif.
2. Pour $A \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, on appelle contenu de A, et on note $c(A)$, le pgcd des coefficients de A. Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que $c(AB) = c(A)c(B)$.
3. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant. On suppose que P n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ de degrés ≥ 1 tels que $P = AB$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et p un nombre premier. On suppose que :
   (i) p ne divise pas a_n ;
   (ii) p divise $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$;
   (iii) p^2 ne divise pas a_0.
   Montrer que A est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

(Classique, Oral ENS : Critère d'Eisenstein)

Exercice 23
Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe un polynôme unitaire irréductible de degré n dans $\mathbb{Q}[X]$.
Exercice 24
Soit p un nombre premier. Prouver que le polynôme

$$P = X^{p-1} + \cdots + X^2 + X + 1$$

est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
Exercice 25
Montrer qu'un corps algébriquement clos est infini.