

TD : Primitives et intégrales

1 Calcul de primitives

Exercice 1

Déterminer les primitives suivantes en précisant un intervalle où elles sont bien définies :

1. $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$
2. $\int \frac{1}{(2x+1)^3} dx$
3. $\int \sqrt{1-x} dx$
4. $\int \cos x \sin x dx$
5. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
6. $\int x \sqrt{1+x^2} dx$
7. $\int \tan x dx$
8. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$
9. $\int \frac{\ln x}{x} dx$
10. $\int \frac{1}{x(\ln x)^4} dx$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$
12. $\int \frac{1}{\operatorname{th} x} dx$
13. $\int \sin^2 x dx$

Exercice 2

Déterminer les primitives suivantes en précisant un intervalle où elles sont bien définies :

1. $\int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4}$
2. $\int \frac{dt}{t^2 - 2t - 3}$
3. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

2 Calcul d'intégrales

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$

2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
3. $\int_1^{\cosh 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$
4. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$
5. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$
6. $\int_{1+e}^{1+2e} \frac{x^2}{x-1} dx$

3 Intégration par parties

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^e t^n \ln(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}) ;$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^3(t) dt ;$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)} dt ;$
4. $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt ;$
5. $\int_0^1 \arctan(t) dt ;$
6. $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt.$
7. $I = \int_0^{\pi/2} t^2 \sin^2(t) dt.$

4 Changement de variable

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable fourni

1. $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} \quad (x = \sqrt{t}) ;$
2. $\int_1^{e^2} \frac{\ln(t)}{t + t(\ln(t))^2} dt \quad (x = \ln(t)) ;$
3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (x = \cos(t)) ;$
4. $\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t+1}} dt \quad (x = \sqrt{t+1}) ;$
5. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad (u = \ln x)$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx \quad (u = \cos x).$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx \quad (u = \tan x).$
8. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \quad (x = \cos u).$
9. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx \quad (u = \sqrt{x}).$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable adéquat :

1. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \, dx$
2. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$
3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} \, dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} \, dx$
5. $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} \, dx$
6. $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} \, dx$

5 Étude d'une fonction définie par une intégrale

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt.$

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*.$
2. déterminer $f'.$
3. Donner le tableau de variation de f et son signe.
4. Étudier les limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*.$
2. Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{-2x} \ln 2 \leq f(x) \leq e^{-x} \ln 2$$

3. Étudier les limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

Exercice 9

On considère $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sinh t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{Soit } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) \, dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f.$
2. Montrer que f est impaire.

Exercice 10

Soit la fonction définie par

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} \, dt$$

1. Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*.$
2. Étudier la parité de $g.$

6 Étude d'une suite définie par une intégrale

Exercice 11

On considère la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \, dx.$$

1. Calculer I_0, I_1 et $I_2.$
2. Étudier la monotonie de $(I_n).$
3. En déduire que (I_n) est convergente.
4. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

5. En déduire la limite de $(I_n).$

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite de terme général

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$$

1. Calculer I_0 et $I_1.$
2. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et $I_n.$
3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < I_n < \frac{e}{n+1}$$

puis la limite de $(I_n).$

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

Une telle intégrale est appelée intégrale de Wallis.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$

2. Calculer I_0 et I_1 .

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

4. Montrer que (I_n) est décroissante et positive. En déduire que (I_n) est convergente.

5. Prouver que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

6. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

7. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}.$$

8. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$.

Analyse

Là encore des notions de base ne sont pas suffisamment maîtrisées :

- équivalents, étude des séries à termes positifs ;
- calcul de primitives, y compris pour les fonctions puissances ;
- dérivées des fonctions composées ;
- manipulation des puissances.

D'autres points sont à améliorer :

- lien suite-série ;
- sommes télescopiques ;
- analyse de première année – théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection, théorème de Rolle, accroissements finis ;
- primitive d'une fonction continue sur un segment, positivité, croissance de l'intégrale ;

FIGURE 1 – Extrait du rapport de Centrale-Supélec, 2019, Filière TSI.