TD : Calcul algébrique

⚠**Les candidats ne sont, en majorité, pas très solides au niveau calculatoire et perdent alors beaucoup de temps. Les défaillances calculatoires sont relevées par plusieurs examinateurs.** *[CCINP 2022]*

⚠**Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.** *[CCINP 2024]*

⚠**Il faut écrire lisiblement, séparer les arguments utilisés et surtout ne pas tenter de tromper le correcteur avec des calculs truqués ou raccourcis.** *[Mines Ponts 2024]*

⚠**Les erreurs de calcul, dont la fréquence devient véritablement envahissante, donnent lieu en général à une erreur de jugement qu'on perçoit chez beaucoup de candidats.** *[Centrale 2022]*

1 Autour des sommes

Exercice 1 : Exprimer les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

- $1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{11}{1024}$
- $3 - 6 + 9 - 12 + \cdots + 33$
- $1.n + 2.(n-1) + \cdots + (n-1).2 + n.1$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : n étant un entier naturel non nul, les éléments qu'on somme étant dans $\mathbb{C}$, quelles sont les formules qui sont vraies :

(a) $\sum_{i=1}^{n} \alpha + a_i = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$
(b) $\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
(c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i$
(d) $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$
(e) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$
(f) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$

Exercice 3 : Si E est un ensemble fini et a un complexe, combien vaut $\sum_{i \in E} 1$ et $\sum_{i \in E} a$?

Exercice 4 : A l'aide d'un changement d'indice, calculer les sommes suivantes, où n est un entier naturel non nul :

1. $\sum_{k=1}^{n} (n+1-k)$
2. $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$
3. $\sum_{k=1}^{n} k2^k$
4. $\sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ (un petit dessin pourrait vous aider !)

Exercice 5 : Calculer les sommes suivantes, où n est un entier naturel non nul :

1. $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.
3. $\sum_{k=1}^{n} k.k!$.
4. $\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)$ (On rappelle que pour tous a et b strictement positifs, $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$)
5. $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$ (à l'aide d'un télescopage) et en déduire que 6 divise $n(n+1)(2n+1)$.

Exercice 6 : Pour n de $\mathbb{N}^*$, calculer :

1. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$.
2. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.k$.
3. $\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$.
4. $\sum_{k=0}^{2n} 2^k\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

2 Autour des produits

Exercice 7 : Calculer les produits suivants où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $q > p$.

1. $\prod_{k=p}^{q} 2$
2. $\prod_{k=1}^{p} 3^k$
3. $\prod_{k=1}^{p} 5\sqrt{k}.k$
4. $\prod_{k=-10}^{10} k$
5. $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
6. $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 8 : Exprimer à l'aide des factorielles :

- $2\times 4\times\cdots\times(2n)$ et $1\times 3\times\cdots\times(2n+1)$, où $n\in\mathbb{N}^*$.
- Le terme général de la suite (u_n) est défini par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}u_n$$

Exercice 9 : Calculer pour tout $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, le produit suivant :

$$P = \prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$$

Exercice 10 : Calculer la limite en $+\infty$ de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2})$

Exercice 11 : Pour tout $x\in\mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite de terme général

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n(x) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.$$

Exercice 12 : Étant donné $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, montrer que $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{2ik\pi/n}\right)$ est de module égal à n et calculer :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

3 Autour des coefficients binomiaux

Exercice 13 : Montrer que pour tous entiers naturels n et p, le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est un entier.

Exercice 14 : Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

1. $A_0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
2. $A_1 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
3. $A_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$
4. $A_3 = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 15 :(Inégalité de Bernoulli) Montrer à l'aide du binôme de Newton que :

$$\forall x \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + nx \leq (1+x)^n$$

Exercice 16 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} \in \mathbb{N}$

Exercice 17 Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

4 Autour des sommes doubles

Exercice 18 Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} j$
b) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$
c) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$
d) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)^2$
e) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \ln(i^j)$
f) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$
g) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$
h) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \dfrac{i^2}{2j-1}$
i) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$

5 Un peu de tout

Exercice 19 : (Transformation d'Abel) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad b_n = B_{n+1} - B_n.$$

Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

Exercice 20 : (Intégrale de Wallis) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Donner une expression explicite de W_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21 : Pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} S_k.$$

Exprimer u_n en fonction S_n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Exercice 22 : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer

$$A = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$$