TD : Développement limité et analyse asymptotique

1 Calcul de Développement limité

Exercice 1
Donner le développement limité des fonctions suivantes en x_0 à l'ordre indiqué.

1. $f : x \mapsto \exp(x)\cos(x)$ à l'ordre 5 en $x_0 = 0$.
2. $f : x \mapsto \ln(1+x)\sin(x)$ à l'ordre 4 en $x_0 = 0$.
3. $f : x \mapsto \frac{1}{1+\ln(1+x)}$ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$.
4. $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\exp(x)-1}$ à l'ordre 3 en $x_0 = 0$.
5. $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ à l'ordre 4 en $x_0 = 1$.

Exercice 2
Donner le développement limité des fonctions suivantes en 0 à l'ordre indiqué.

1. $f : x \mapsto (1+2x)^x$ à l'ordre 5.
2. $f : x \mapsto \ln(1+sh(x))$ à l'ordre 4.
3. $f : x \mapsto \sqrt{1+\arctan(x)}$ à l'ordre 3.

Exercice 3
Donner le développement limité des fonctions suivantes en 0 à l'ordre indiqué.

1. $f : x \mapsto \arcsin(\frac{1+x}{2+x})$ à l'ordre 2.
2. En calculant pour tout réel x, $\int_0^x \left(1+\tan^2 t\right)\, dt$, déduire le développement limité à l'ordre 6 de la fonction tan.
3. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$ à l'ordre 10.

Exercice 4
On note $f :\ x \mapsto f(x) = \ln(1+x^2) - x$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. Former le $DL_4(0)$ de f^{-1}.

2 Calcul de limites et équivalents

Exercice 5
En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes, sous réserve d'existence.

1. $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$ en 0.
2. $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)-x\sin(x)}{x^4}$ en 0.
3. $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1} - x$ en $+\infty$.

Exercice 6
Trouver des équivalents simples et les limites éventuelles des fonctions suivantes aux points indiqués.

1. $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^5}$ en 0. $(\frac{1}{8x^2})$
2. $f : x \mapsto \frac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}}{3\sin x-\ln(1+x)}$ en 0.$(\frac{13}{30})$
3. $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}$ en $+\infty$. $(\frac{1}{x^2})$

3 Étude de fonctions

⚠ Les exercices de cette section doivent être abordés en utilisant les développements limités.

Exercice 7
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x \sin(x)}{1+x^2}$ possède un minimum local en 0.
Exercice 8
Au voisinage de 0, étudier la position de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ par rapport à sa tangente.
Exercice 9
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$.

1. Montrer que la fonction f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente au graphe de f en 0 puis étudier la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

Exercice 10
Étudier les branches infinies de la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\ f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$
Exercice 11
Étudier les branches infinies de la fonction définie par :
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\ f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-3}}$

4 Développement asymptotique

Exercice 12
Considérons la fonction définie par $\forall x \in]1, +\infty[\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$
Prouver qu'au voisinage de $+\infty$ $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})(*)$ et en déduire que f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ en précisant sa position par rapport à la courbe représentative de f.
La relation (*) s'appelle **Développement asymptotique** de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $\frac{1}{x}$ (ou $o(\frac{1}{x})$).
Exercice 13
Considérons la fonction $f : x \mapsto (ex)^x$, montrer qu'en voisinage de 0, on a :

$$f(x) = 1 + x + x\ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x)$$

Il s'agit du développement asymptotique de f en 0 à la précision $x^2 \ln(x)^2$.
Exercice 14
On veut donner un développement asymptotique à trois termes au voisinage de $+\infty$ de la fonction :

$$f : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}.$$

1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ $f(x) \sim x$.
2. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de f.
3. Le graphe de la fonction f admet-il une asymptote oblique en $+\infty$?

5 Un peu des suites

Exercice 15
Pour tout entier naturel n, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 et, plus précisément, que :

$$I_n - 1 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. Prouver que :

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 16
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle admet le développement asymptotique suivant :

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Exercice 17
Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$u_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Donner un équivalent de (u_n) lorsque $n \to +\infty$.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de (u_n)

(Oral X)