TD : Dénombrement

Exercice 1
Soient A et B deux parties de E et F. Étant donnée une application $f : E \to F$, est-il vrai que :
(a) Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.
(b) Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.
(c) Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
(d) Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

Exercice 2
Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

Exercice 3
Démontrer que pour n et p entiers tels que $0 \leq n \leq p$, on a :

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}.$$

Exercice 4
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que :

$$\forall p \in [\![0, m+n]\!], \quad \binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}.$$

Exercice 5
Soit E un ensemble à n éléments, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X).$$

Exercice 6
Soit $n > 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $z_0, z_1, \ldots, z_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leq z_0 \leq z_1 \leq \cdots \leq z_n \leq 1$.

Prouver que parmi ces réels, il y en a deux dont la distance est inférieure ou égale à $\frac{1}{n}$.

Exercice 7
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q \leq n$ et $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}$.

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$?

Exercice 9
Soit $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de P (comptées avec multiplicité) et $\rho = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|$. Démontrer que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $|a_i| \leq \binom{n}{i}\rho^{n-i}$.

Exercice 10
Soient p un nombre premier et n un entier naturel non nul. Déterminer le cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.