

Devoir Maison n° 11

Dans ce problème, on étudie quelques propriétés des parties convexes du plan, et on démontre le théorème de projection sur un convexe fermé ; un théorème fondamental en analyse et en optimisation.

1 Préliminaires

Définition 1 : Ensemble convexe. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$. On dit que C est *convexe* si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], (1 - t)x + ty \in C.$$

1. Montrer que $[0, 1] \times [0, 1]$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Le cercle unité $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est-il convexe ?
3. Soient A et B deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^2$ et $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Démontrer que $A + B$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.
4. Donner un exemple de deux convexes de $\mathbb{R}^2$ dont l'union n'est pas convexe.
5. Soit I un ensemble non vide et $(C_i)_{i \in I}$ une famille de convexes de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\bigcap_{i \in I} C_i$ est un convexe de $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite, $\mathbb{R}^2$ serait muni de son produit scalaire usuel :

$$\forall ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

nous noterons $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire, i.e. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

2 Sur les suites

Soient $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

6. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(x_n, y_n) - (x, y)\| = 0$.

Définition 2 : Convergence d'une suite de $\mathbb{R}^2$, suite de Cauchy. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge dans $\mathbb{R}^2$ vers (x, y)* si l'une des deux conditions équivalentes précédentes est satisfaite. On note alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$

- On dit que la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (n, p \geq N) \implies \|(x_n, y_n) - (x_p, y_p)\| \leq \varepsilon.$$

On admet le résultat suivant :

$\mathbb{R}^2$ est complet : Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^2$. Alors, $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^2$.

3 Projection sur un convexe fermé

3.1 Théorème de projection sur un convexe fermé

Définition 3 : Partie fermée.

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est fermée si :

$$\forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \forall z \in \mathbb{R}^2, ((z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } z) \implies (z \in A).$$

Définition 4 : Distance d'un point à une partie

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et x un réel quelconque. On appelle distance de x à A et on note $\text{dist}(x, A)$ la quantité définie par :

$$\text{dist}(x, A) = \inf_{w \in A} \|w - x\|$$

On souhaite montrer le résultat suivant :

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ **un ensemble convexe fermé non vide**. Pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, *il existe un unique* $z' \in C$ tel que

$$\|z - z'\| = \text{dist}(z, C).$$

Cet unique élément est appelé la **projection** de z sur C .

Soient $z \in \mathbb{R}^2$ et $d = \text{dist}(z, C)$. On souhaite prouver en premier lieu l'existence de la projection de z sur C .

7. Justifier déjà l'existence de d .

8. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists z_n \in C, \quad \|z - z_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

On a ainsi une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de C telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|z - z_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$

9. Montrer l'identité du parallélogramme :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

En donner une interprétation géométrique à l'aide d'une figure et une petite explication.

10. En déduire que

$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \|z_n - z_p\|^2 \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{p}.$$

11. Conclure.

12. Prouver l'unicité de la projection de z sur C .

Pour ceci, on peut supposer qu'il existe z_1 et z_2 dans C tels que $\|z - z_1\| = \|z - z_2\| = d$, et prouver que $z_1 = z_2$ à l'aide de l'identité du parallélogramme.

13. Donner un exemple d'une partie C de $\mathbb{R}^2$, non vide et non convexe, ainsi qu'un point z de $\mathbb{R}^2$, tels que la projection de z sur C ne soit pas unique, ou autrement dit, l'ensemble des points minimisant la distance entre z et C ne soit pas réduit à un singleton.

(Une figure accompagnée d'une petite explication est largement suffisante.)

Dans la suite, nous noterons $p_C(z)$ la projection de z sur le convexe C .

3.2 Une caractérisation

Nous souhaitons prouver le résultat suivant :

Soit C un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ et $z^* \in C$, on a :

$$z^* = p_C(z) \iff (\forall y \in C, \langle z^* - z, z^* - y \rangle \leq 0). \quad (3.2)$$

Soit $z \in \mathbb{R}^2$.

14. **Sens direct.** Soit $p_C(z)$ la projection de z sur C .

(a) Montrer que : pour tout $y \in C$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\|z - (ty + (1 - t)p_C(z))\|^2 \geq \|z - p_C(z)\|^2.$$

(b) En déduire que

$$\forall y \in C, \quad \langle p_C(z) - z, p_C(z) - y \rangle \leq 0.$$

15. **Sens indirect.** Soit z^* vérifiant l'inégalité de droite de la ligne (3.2).

(a) Montrer que : pour tout $y \in C$,

$$\|y - z\|^2 = \|y - z^*\|^2 + \|z^* - z\|^2 - 2\langle z^* - z, z^* - y \rangle.$$

(b) En déduire que $z^* = p_C(z)$.

16. Montrer que l'application p_C est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$, i.e. montrer que p_C vérifie

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Fin de l'énoncé