Théorie des groupes et dénombrement

1 Problème

Soient $(G, \star)$ un groupe et X un ensemble non vide. **Une action du groupe** G sur l'ensemble X est une application que l'on note en général par le symbole $\cdot$:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

— pour tous g et h dans G et pour tout $x \in X$,

$$g \cdot (h \cdot x) = (g \star h) \cdot x$$

— pour tout $x \in X$, en notant e le neutre du groupe G, on a : $e \cdot x = x$.

On dira dans ce cas que **le groupe G agit sur l'ensemble X.**
Soit $x \in X$. Avec les notations précédentes, on appelle **orbite de x par** G, l'ensemble :

$$\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x \,;\, g \in G\}.$$

On appelle **stabilisateur de** x, l'ensemble :

$$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

L'action de G sur X est dite :

— **transitive** si $\forall x, y \in X$, $\exists g \in G$, $y = g \cdot x$

— **fidèle** si le morphisme de groupes :

$$\varphi : \begin{cases} G \to S(X) \\ g \mapsto (\varphi(g) : x \mapsto g \cdot x) \end{cases}$$

est injectif, ce qui signifie que :

$$\big(g \in G \text{ et } \forall x \in X,\, g \cdot x = x\big) \Leftrightarrow \big(g = 1_G\big)$$

Quelques exemples

1. Action du groupe symétrique

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel. Montrer que le groupe $(S_n, \circ)$ agit sur l'ensemble $X = [\![1, n]\!]$ par l'action :

$$(\sigma, k) \mapsto \sigma(k).$$

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer l'orbite $\mathcal{O}(k)$ par S_n.

(c) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer le cardinal du stabilisateur de k.

2. Action du groupe sur lui-même par translation

(a) Soit $(G, \star)$ un groupe. Montrer que le groupe G agit sur l'ensemble $X = G$ selon :

$$(g, x) \mapsto g \star x.$$

(b) Soit $x \in G$. Déterminer l'orbite $\mathcal{O}(x)$.

3. Action du groupe sur lui-même par conjugaison

Soit $(G, \star)$ un groupe. Montrer que le groupe G agit sur l'ensemble $X = G$ selon :

$$(g, x) \mapsto g \star x \star g^{-1}.$$

Quelques proriétés

On considère ici un groupe $(G, \star)$ agissant sur un ensemble non vide X, avec l'action $(g, x) \mapsto g \cdot x$.
Si A est un ensemble fini, on désignera par $|A|$ son cardinal.

4. Soit $x \in X$. Montrer que le stabilisateur de x est un sous-groupe de G.
5. Montrer que si $x, y \in X$ sont dans la même orbite, alors $\text{Stab}(x)$ et $\text{Stab}(y)$ sont conjugués.
6. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble X par :

$$\forall (x,y) \in X^2,\, x\mathcal{R}y \iff \exists g \in G,\, x = g \cdot y.$$

   (a) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) En déduire que l'ensemble des orbites :
   $$\{\mathcal{O}(x);\, x \in X\}$$
   forme une partition de l'ensemble X.
   (c) Montrer que si le groupe G est fini, alors pour tout $x \in X$:
   $$|G| = |\mathcal{O}(x)| \times |\text{Stab}(x)|.$$

Formule de Burnside

7. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini opérant sur un ensemble fini E. Pour tout $g \in G$, on note $\text{Fix}(g) = \{x \in E \mid g \cdot x = x\}$.

   Montrer que le nombre d'orbites est :
   $$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$
   Indication : Calculer le cardinal de l'ensemble : $F = \{(g, x) \in G \times E \mid g \cdot x = x\}$ de deux manières.

Théorème de Cayley

8. Soit G un groupe. En considérant l'action de G sur lui-même par translation, prouver que G est isomorphe à un sous-groupe de $S(G)$.

Application aux drapeaux

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p un nombre premier. Soit E l'espace $\mathbb{F}_p^n$, où $\mathbb{F}_p$ désigne le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Un *drapeau complet* de E désigne une suite

$$F_\bullet := (F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n)$$

de sous-espaces emboîtés de E tels que $\dim F_k = k$ pour tout k de 1 à n.

9. Montrer que $GL(E)$ agit transitivement sur $\mathcal{F}_n$, l'ensemble des drapeaux complets de E par
   $$g \cdot (F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n) := (g(F_1) \subset g(F_2) \subset \cdots \subset g(F_n)).$$
10. Montrer que le stabilisateur d'un drapeau complet est isomorphe au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.
11. En déduire le cardinal de $\mathcal{F}_n$.

Fin de l'énoncé