

Problème 1 : Analyse dimensionnelle

1) Pour l'analyse dimensionnelle nous rappelons les notations usuelles : M pour masse, L pour longueur et T pour temps. Nous savons que E est homogène à une énergie : $[E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$, et ΔA est homogène à une surface : $[\Delta A] = L^2$. Sachant que $E = \gamma \cdot \Delta A$:

$$[\gamma] = \frac{[E]}{[\Delta A]} = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}{L^2} = M \cdot T^{-2}$$

2) La force F est homogène à : $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$, donc $1 N \cdot m^{-1} = 1 kg \cdot s^{-2}$.
Donc cette unité est **cohérente** avec le résultat trouvé à la question précédente.

3) On ne peut additionner que des termes de même dimension.

Donc $[c]^2 = [g]^\alpha \cdot [H_0]^\beta$. En explicitant :

$$(L \cdot T^{-1})^2 = (L \cdot T^{-2})^\alpha \cdot (L)^\beta$$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ -2 = -2\alpha \end{cases}$$

Donc $\boxed{\alpha = \beta = 1}$

Déterminons la dimension du deuxième terme :

$$\left[\frac{4\pi^2 \cdot H_0 \cdot \gamma}{\rho \cdot \lambda^2} \right] = \frac{(L) \cdot (M \cdot T^{-2})}{(M \cdot L^{-3}) \cdot (L^2)} = L^2 \cdot T^{-2}$$

Donc l'expression proposée est bien **homogène**.

4) $\lambda \approx 10 m$, $g \approx 9,8 \text{ USI} \approx 10 \text{ USI}$. On choisit $H_0 = 3 m$ et $\rho \approx 10^3 kg \cdot m^{-3}$. On établit que :

$$\begin{cases} g \cdot H_0 \approx 30 m^2 \cdot s^{-2} \\ \frac{4\pi^2 \cdot H_0 \cdot \gamma}{\rho \cdot \lambda^2} \approx 8 \cdot 10^{-5} m^2 \cdot s^{-2} \end{cases}$$

On constate que :

$$\frac{4\pi^2 \cdot H_0 \cdot \gamma}{\rho \cdot \lambda^2} \ll g \cdot H_0$$

On peut donc faire l'hypothèse que :

$$c = \sqrt{g \cdot H_0}$$

Cette formule est vérifiée en « eau peu profonde ». En eau profonde, la vitesse (de phase) de la houle est donnée par la relation de Newton : $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{g \cdot \lambda}$, c.à.d. qu'elle dépend de la longueur d'onde de la houle...

Problème 2 : Calculs d'incertitudes

A-Mesure par temps de vol

Variabilité de la mesure unique :

1) La célérité du son dans l'air est le rapport de la distance d parcourue sur le temps t de vol :

$$c = \frac{d}{t}$$

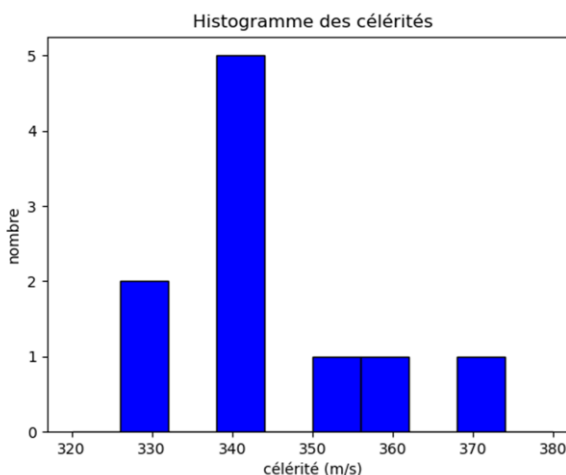
A.N. : $c = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$: résultat donné avec 2 chiffres significatifs, si on prend les 2CS des données de l'énoncé. Si on mesure la distance avec une règle graduée au mm et un chronomètre au 1/100 s, le nombre de chiffres significatifs peut être plus élevé.

2) A partir des mesures données dans l'énoncé, on établit les célérités données dans le tableau ci-dessous (en rajoutant le résultat de la première mesure dans la première colonne) :

$c \text{ (} 10^2 \cdot \text{m.s}^{-1} \text{)}$	3,4	3,7	3,4	3,4	3,3	3,6	3,3	3,4	3,4	3,5
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Nous réalisons l'histogramme de distribution des célérités grâce au programme python ci-dessous :

```
#Tracé d'un histogramme
from matplotlib import pyplot as plt
c= [34*10, 37*10, 34*10, 34*10, 33*10,
36*10, 33*10, 34*10, 34*10, 35*10]#
Tableau des célérités avec 2 CS
plt.hist(c, range=(320, 380), bins=10,
color='blue', edgecolor='black')
plt.xlabel("célérité (m/s)")
plt.ylabel("nombre")
plt.title("Histogramme des célérités")
plt.show()
```



3) On détermine l'écart-type :

```
>>> #Calcul de la l'écart-type
import numpy as np
c= [34*10, 37*10, 34*10, 34*10, 33*10, 36*10, 33*10, 34*10, 34*10, 35*10]
np.std(c, ddof=1) #écart-type
12.649110640673518
```

Soit l'écart-type $s(c) = 13 \text{ m.s}^{-1}$ donné avec deux chiffres significatifs.

$$u(c) = 13 \text{ m.s}^{-1}$$

On ne tronquant pas les valeurs de c et en considérant les valeurs de distance et de temps de vol, on obtient $u(c) = 10 \text{ m.s}^{-1}$

4) Valeur moyenne sur les mesures effectuées par le premier groupe :

```
>>> #Calcul de la valeur moyenne
import numpy as np
c= [34*10, 37*10, 34*10, 34*10, 33*10, 36*10, 33*10, 34*10, 34*10, 35*10]
np.mean(c) #valeur moyenne de la célérité du son dans l'air
344.0
```

Compte tenu du fait que l'incertitude-type est donnée avec 2 chiffres significatifs (dont une décimale), nous donnons l'expression de la célérité moyenne également avec une décimale (ce qui implique 3 CS) :

La valeur moyenne de la célérité des ondes ultrasonores dans l'air est : $c_{moy/1} = 344 \pm 13 \text{ m.s}^{-1}$.
En ne tronquant pas les valeurs de c, on obtient un résultat légèrement différent.

Variabilité de la valeur moyenne :

5) Tableau des mesures de la célérité moyenne effectuées par les 11 groupes (la valeur moyenne du groupe 1 est dans la première colonne) :

Groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$c_{moy} \text{ (m/s)}$	344,0	343,8	339,2	343,0	343,9	340,5	335,8	344,3	341,0	346,5	337,9

Incertitude-type expérimentale sur la moyenne des célérités :

On calcule l'écart type des dix différentes valeurs moyennes observées par les différents groupes puis la valeur finale trouvée en faisant la moyenne.

>>> #Calcul de l'écart-type sur les célérités moyennes

```
import numpy as np
```

```
cmoy= [344.0, 343.8, 339.2, 343.0, 343.9, 340.5, 335.8, 344.3, 341.0, 346.5, 337.9]
```

```
np.std(cmoy, ddof=1) #écart-type
```

```
3.2144842651518926
```

>>> #Calcul de la valeur moyenne des célérités moyennes

```
import numpy as np
```

```
cmoy= [344.0, 343.8, 339.2, 343.0, 343.9, 340.5, 335.8, 344.3, 341.0, 346.5, 337.9]
```

```
np.mean(cmoy) #valeur moyenne de la célérité du son dans l'air
```

```
341.8090909090909
```

On obtient ainsi $c_{moy/11} = 341,8 \pm 3,2 \text{ m.s}^{-1}$.

6) On applique la formule du cours dans le cas d'une incertitude de type A en reprenant la distribution de la question 2 et les 10 mesures individuelles de vitesse.

L'écart-type sur la mesure des moyennes des célérités est $s(c) = 13 \text{ m.s}^{-1}$. L'incertitude-type est donnée par :

$$u(c_{moy}) = \frac{s(c)}{\sqrt{n}}$$

avec $n = 10$: $u(c_{moy}) = 4,0 \text{ m.s}^{-1}$

On obtient alors

$$c_{moy} = 344 \pm 4,0 \text{ m.s}^{-1}$$

On obtient des valeurs similaires. La différence peut s'expliquer par le fait que le processus n'est pas exactement identique puisque les valeurs de distances changent. D'autre part la formule du cours n'est valable que pour un grand nombre d'expérience ce qui avec 10 mesures reste discutable. D'autre part la réalisation de cette expérience par des expérimentateurs différents peut entraîner des erreurs systématiques qui faussent les résultats.

B-Mesure par aspect ondulatoire

Mesure de la longueur d'onde

7) Si on note $u(x)$ l'incertitude sur la position d'un détecteur, celle-ci est donnée par la formule du cours

$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Avec Δ précision de la mesure. Nous savons que : $2. \Delta = 0,1 \text{ cm}$ pour une règle graduée en mm

A.N. : $u(x) = 0,29 \text{ mm}$

8) On note d la distance séparant les deux détecteurs : $d = x_2 - x_1$ avec $x_1 = 20,2 \text{ cm}$ et $x_2 = 28,6 \text{ cm}$:

$$d = 8,4 \text{ cm}$$

On note $u(d)$ l'incertitude-type sur la distance séparant les deux détecteurs. Nous savons que pour une somme $g(x, y) = a. x + b. y$:

$$u(g) = \sqrt{(a. u(x))^2 + (b. u(y))^2}$$

On en déduit que :

$$u(d) = u(g) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2} = \sqrt{2}. u(x)$$

avec $u(x_1) = u(x_2) = u(x)$.

A.N. : $u(d) = 0,41 \text{ mm}$

En accordant les chiffres significatifs de d à ceux de $u(d)$, on peut écrire que :

$$d(\text{mm}) = 84,00 \pm 0,41$$

9) Sachant que : $d = 10 \cdot \lambda$; $\lambda = 8,400 \text{ mm}$ et $u(\lambda) = 0,041 \text{ mm}$:

$$\lambda(\text{mm}) = 8,400 \pm 0,041$$

Mesure de la fréquence

10) La précision de la mesure est $\Delta = 0,1 \mu\text{s}$ donc l'incertitude-type sur la période est :

$$u(T) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

A.N. : $u(T) = 0,058 \mu\text{s}$.

11) Fréquence du signal : $\nu = 1/T$. A.N. : $\nu = 41,0 \text{ kHz}$.

Sachant que pour un produit : $g(x, y) = \alpha \cdot x^a \cdot y^b$ l'incertitude-type est donnée par :

$$\left| \frac{u(g)}{g} \right| = \sqrt{\left(\frac{a \cdot u(x)}{x} \right)^2 + \left(\frac{b \cdot u(y)}{y} \right)^2}$$

avec $\alpha = 1$, $a = 0$ et $b = -1$ on établit que :

$$\frac{u(\nu)}{\nu} = \frac{u(T)}{T}$$

Soit :

$$u(\nu) = \left(\frac{\nu}{T} \right) \cdot u(T)$$

A.N. : $u(\nu) = 97 \text{ Hz}$.

Mesure de la célérité

12) Nous savons que $c = \lambda \cdot \nu$. A.N. : $c = 344,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Avec la formule du produit donnée à la question 11), on établit que :

$$\left| \frac{u(c)}{c} \right| = \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{u(\nu)}{\nu} \right)^2}$$

Soit :

$$u(c) = c \cdot \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{u(\nu)}{\nu} \right)^2}$$

A.N. : $u(c) = 1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La célérité du son dans l'air est : $c = 344,3 \pm 1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

13) Calculons l'écart normalisé relatif aux deux méthodes de mesures :

- Méthode par temps de vol : $c = 341,8 \pm 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Méthode ondulatoire : $c = 344,3 \pm 1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Sachant que :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}$$

A.N. : $E_N = 0,18 < 2$: nous pouvons considérer que les mesures sont compatibles.

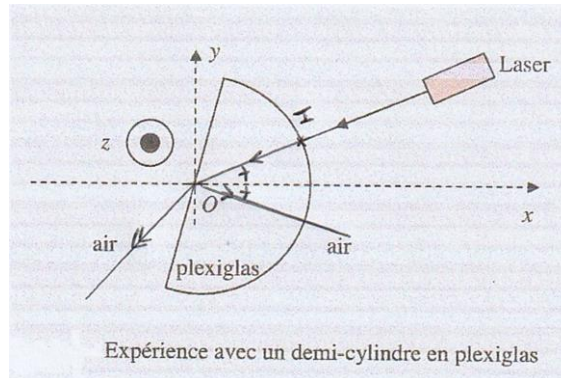
Problème 3 : La fibre optique

I. Généralités

I.1) Lois de Snell-Descartes :

- Les rayons réfléchis et réfractés appartiennent au plan d'incidence.
- Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale : $i_1' = i_1$.
- Le rayon réfracté est lié au rayon incident par la loi des sinus : $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$.

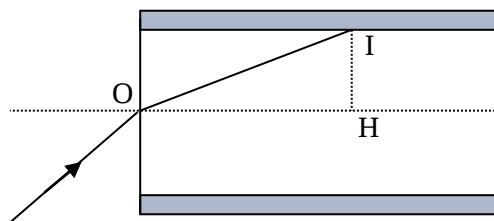
I.2) Rayons réfléchis et réfractés :



Le rayon incident arrive sous incidence normale sur le dioptré cylindrique. En I , une partie de la lumière est réfléchi, l'autre est réfractée. Le rayon réfléchi est opposé au rayon incident. Le rayon réfracté est non dévié car confondu avec la normale. En O , le rayon subit encore une réflexion et une réfraction. Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale. Le rayon réfracté s'éloigne de la normale en passant dans l'air tant que l'angle d'incidence est inférieur à l'angle limite. Dès que l'angle d'incidence devient supérieur à l'angle limite, on peut observer le phénomène de réflexion totale (dans le milieu le plus réfringent). Le laser permet d'avoir un faisceau plus fin et plus intense. Le fait que le rayonnement soit monochromatique, il n'y a pas de dispersion.

II. La fibre à saut d'indice

II.1) Propagation du rayon lumineux dans la fibre optique :



En I , le rayon lumineux évolue vers un milieu moins réfringent. Il existe donc un angle limite i_L défini dans le milieu le plus réfringent. Si l'angle d'incidence en I est supérieur à i_L il y a réflexion totale dans le cœur de la fibre, et donc propagation guidée. L'angle limite est défini par :

$$\sin i_L = \frac{n_g}{n_c}$$

II.2) Dans le triangle OIH : $i + r = \frac{\pi}{2}$. Appliquons la loi des sinus en O : $n_a \cdot \sin \theta = n_c \cdot \sin r$. Avec $r = \frac{\pi}{2} - i$ la relation devient :

$$n_a \cdot \sin \theta = n_c \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - i \right) = n_c \cdot \cos i$$

A la limite de réfraction : $i_L + r_L = \frac{\pi}{2}$ donc :

$$n_a \cdot \sin \theta_L = n_c \cdot \cos i_L$$

Avec $\sin i_L = \frac{n_g}{n_c}$:

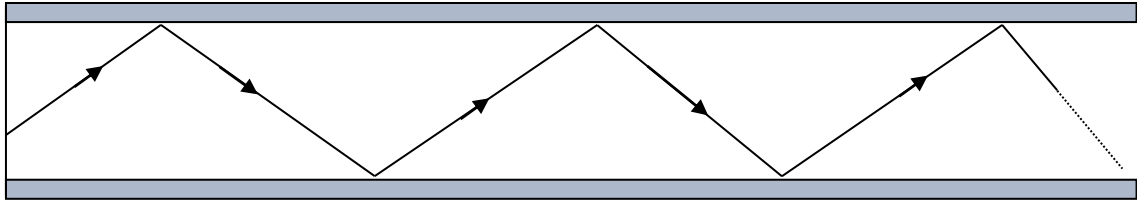
$$n_a \cdot \sin \theta_L = n_c \cdot \sqrt{1 - (\sin i_L)^2} = n_c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c} \right)^2}$$

On vérifie que :

$$n_a \cdot \sin \theta_l = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

Le rayon reste confiné dans le cœur de la fibre si $i > i_L$. Sachant $i_L + r_L = \frac{\pi}{2}$ si $i > i_L$ alors $r < r_L$ et $\theta < \theta_L$.

Allure de la Propagation du rayon dans la fibre pour $i > i_L$:



A.N. : $\theta_l = 14,1^\circ$.

II.3) Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable entre 0 et θ_L . Le rayon qui arrive sous incidence normale ($\theta = 0$) traverse le plus rapidement la fibre.

$$T_1 = \frac{L}{v}$$

Avec $v = \frac{c}{n_c}$:

$$T_1 = \frac{L}{v} = \frac{n_c \cdot L}{c}$$

II.4) Le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre est celui pour lequel $\theta \rightarrow \theta_L$. Soit : $T_2 = \frac{d}{v}$ avec d distance parcourue dans la fibre par le rayon pour $\theta = \theta_L$. Par construction $d = \frac{L}{\sin i_L} = \frac{n_c \cdot L}{n_g}$

On établit ainsi que :

$$T_2 = \frac{n_c^2 \cdot L}{n_g \cdot c}$$

II.5) Expression de $\delta T = T_2 - T_1$:

$$\delta T = \frac{n_c \cdot L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right)$$

Avec $\Delta = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{n_g}{n_c} \right)^2 \right)$ on peut poser que :

$$\frac{n_c}{n_g} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cdot \Delta}} = (1 - 2 \cdot \Delta)^{-\frac{1}{2}}$$

Avec $\Delta \ll 1$, en utilisant la relation proposée au premier ordre en Δ :

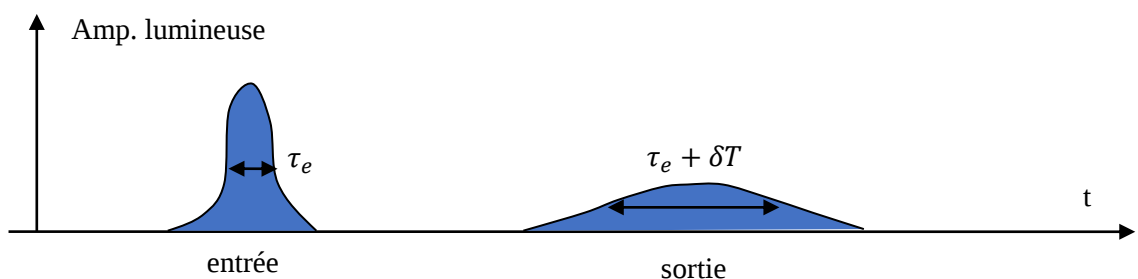
$$\frac{n_c}{n_g} = 1 + \Delta$$

On en déduit que :

$$\delta T = \frac{n_c \cdot L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right) = \frac{n_c \cdot L \cdot \Delta}{c}$$

A.N. : $\delta T = 662 \text{ ns}$

II.6) Evolution de l'impulsion dans la fibre : l'aire de l'amplitude lumineuse ne varie pas (on néglige toute dissipation lumineuse dans la fibre), mais l'impulsion subit un étalement temporel au cours de sa propagation.



II.7) Pour éviter tout problème de recouvrement des signaux, il faut que la période $T > \delta\tau$. Avec $F = \frac{1}{T}$; ceci implique que :

$$\delta T \cdot F < 1$$

II.8) A la limite de recouvrement des deux impulsions : $\delta T_{max} = \frac{1}{F}$ on en déduit que :

$$B = L_{max} \cdot F = \frac{L_{max}}{\delta T_{max}} = \frac{c}{n_c \cdot \Delta}$$

B correspond à la limite au-delà de laquelle il n'est plus possible de transmettre de l'information dans cette fibre.

A.N. : $B = 10,1 \text{ MHz} \cdot \text{km}$. Avec $B = L_{max} \cdot F$ on établit que : $L_{max} = 101 \text{ m}$ ce qui est vraiment faible pour une FO.

III. La fibre optique à gradient d'indice

III.1) En appliquant la loi des sinus dans le milieu stratifié on établit que :

$$n_{j-1} \cdot \sin i_{j-1} = n_j \cdot \sin i_j = n_{j+1} \cdot \sin i_{j+1} = \text{cte}$$

Dans l'hypothèse que cette relation soit vérifiée dans une fibre à gradient d'indice, cette relation devient :

$$n(y) \cdot \sin i(y) = \text{cte}$$

En notant que $i(y) + \varphi = \frac{\pi}{2}$ on établit que :

$$n(y) \cdot \cos \varphi(y) = \text{cte}$$

La valeur de la constante est fixée par l'angle incidence dans la fibre en O . Soit :

$$n(y) \cdot \cos \varphi(y) = n(0) \cdot \cos \varphi(0) = \text{cte}$$

En notant que $n^2(0) = n_c^2$ et que $\varphi(0) = \theta_0$:

$$n(y) \cdot \cos \varphi(y) = n_c \cdot \cos \theta_0 = \text{cte}$$

Appliquons la loi des sinus en O :

$$n_a \cdot \sin \theta = n_c \cdot \sin \theta_0$$

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{n_a \cdot \sin \theta}{n_c}\right)$$

$$n(y) \cdot \cos \varphi(y) = n_c \cdot \cos \theta_0 = \text{cte} \text{ avec } \theta_0 = \arcsin\left(\frac{n_a \cdot \sin \theta}{n_c}\right)$$

III.2) A partir de la figure a on peut dire que : $\tan \varphi(y) = \frac{dy}{dx}$ donc :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \tan^2 \varphi(y) = \frac{1}{\cos^2 \varphi(y)} - 1$$

Avec :

$$\cos \varphi(y) = \frac{n_c \cdot \cos \theta_0}{n(y)}$$

On vérifie que :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_c \cdot \cos \theta_0}\right)^2 - 1$$

III.3) On constate que l'équation différentielle vérifiée par $y(x)$ correspond à celle d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2.\Delta.y}{(r_c.\cos\theta_0)^2} = 0$$

Posons $k^2 = \frac{2.\Delta}{(r_c.\cos\theta_0)^2}$ l'équation différentielle se ramène à :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2.y = 0$$

La solution de cette équation différentielle est du type :

$$y(x) = A.\cos(k.x) + B.\sin(k.x)$$

Les constantes A et B sont définies par les conditions aux limites : $y(0) = 0$ et $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \tan\theta_0$. Soit en explicitant :

$$\begin{aligned} y(0) &= A = 0 \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} &= k.B = \tan\theta_0 \end{aligned}$$

Soit l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$y(x) = \frac{\tan\theta_0}{k}.\sin(k.x)$$

En explicitant $k = \frac{\sqrt{2.\Delta}}{r_c.\cos\theta_0}$:

$$y(x) = \frac{r_c.\sin\theta_0}{\sqrt{2.\Delta}}.\sin(k.x) = \frac{r_c.\sin\theta_0}{\sqrt{2.\Delta}}.\sin\left(\frac{r_c.\cos\theta_0.x}{\sqrt{2.\Delta}}\right)$$

On constate que la fonction $y(x)$ est sinusoïdale de période spatiale $\lambda = \frac{2.\pi}{k} = \frac{2\pi.r_c.\cos\theta_0}{\sqrt{2.\Delta}}$. Sur une période le rayon lumineux coupe deux fois l'axe Ox donc $d = \frac{\lambda}{2}$:

$$d = \frac{\pi.r_c.\cos\theta_0}{\sqrt{2.\Delta}}$$

III.4) Avec $O.N. = n_a.\sin\theta_L$ on constate que l'ouverture numérique est la même pour une fibre à saut d'indice et une fibre à gradient d'indice.

III.5) A.N. : Pour θ_0 maximum : $\theta_0 = \arcsin\left(\frac{n_a.\sin\theta_L}{n_c}\right) = 9,37^\circ$ et $\delta T' = 4,50 \text{ ns}$. On constate que $\delta T' \ll \delta T$: le débit d'une fibre à gradient d'indice est donc bien supérieur (dans le cadre de cette étude, le rapport est 150) à celui d'une fibre à saut d'indice.... Le fait que la fibre à gradient d'indice tend à ramener le rayon vers l'axe de la fibre, l'écart temporel est très inférieur.

III.6) Ce modèle est vérifié dans la limite d'application des lois de l'optique géométrique. Si le rayon de la fibre est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde lumineuse, une description ondulatoire est nécessaire.

IV. Contrainte mécanique exercée sur une fibre

Sous incidence normale, la perte de courbure apparaîtra dès que l'angle d'incidence en I devient égale à l'angle limite i_L . En explicitant à partir de la figure proposée :

$$\sin i_L = \frac{r}{r + 2.r_c} = \frac{n_g}{n_c}$$

En négligeant l'épaisseur de la gaine ($r_g - r_c \approx 0$). On établit ainsi que :

$$r = \frac{2.r_c.n_g}{n_c - n_g}$$

A.N. : Avec $r_g - r_c \approx 0$, on peut faire l'hypothèse que $2.r_c = r_c + r_g = 1,00 \text{ mm}$ soit $r = 7,40 \text{ cm}$.

Il faut vraiment imposer des contraintes mécaniques sévères pour que la fibre à saut d'indice subisse des pertes de courbure.