

Devoir surveillé n° 2

Ondes et signaux

- La durée de l'épreuve est de 3 heures. Les étudiants ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Les résultats devront être encadrés, un malus pourra être appliqué dans le cas contraire.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.
- Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.

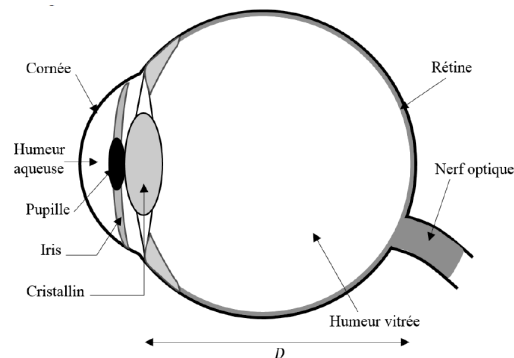
On rappelle pour une lentille mince dans les conditions de Gauss la relation de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$ et la relation de grandissement $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$ où $A'B'$ est l'image de AB par la lentille de centre O .

Problème 1 Imagerie

Les parties de ce problème ainsi que beaucoup de questions sont largement indépendantes.

A L'œil

Pour former des images, le premier instrument utilisé par l'homme est bien sûr son œil. Un schéma simplifié de l'œil est proposé sur la figure ci-dessous :



Les principaux éléments constitutifs de l'œil qui sont étudiés dans cette partie sont :

- l'ensemble iris-pupille : c'est un diaphragme circulaire qui limite le faisceau lumineux entrant dans l'œil. Son diamètre d est compris entre 2 mm et 8 mm ;
 - le cristallin : c'est une lentille convergente dont on peut faire varier la vergence grâce à un effort musculaire ;
 - la rétine : elle joue le rôle d'écran sur lequel se forment les images. Elle est constituée d'un ensemble de cellules photosensibles dont le diamètre $2r$ est de l'ordre de $5,0 \mu\text{m}$;
 - l'humeur vitrée : c'est un milieu d'indice $n = 1,34$ dans lequel se propage la lumière entre le cristallin et la rétine ;
 - l'humeur aqueuse : c'est un liquide biologique maintenant la pression intra-oculaire et la forme du globe oculaire ;
 - la cornée : c'est la partie transparente du globe oculaire. Elle transmet la lumière vers le cristallin.
- On donne la distance cristallin-rétine : $D = 1,5 \text{ cm}$.

A.1 Proposer une schématisation simplifiée de l'œil à l'aide d'une lentille convergente de distance focale variable, d'un diaphragme et d'un écran, l'ensemble étant placé dans l'air. Ce schéma porte le nom du modèle de l'œil réduit.

Grâce à la capacité d'accommodation de l'œil, l'observateur peut voir net des objets situés entre le punctum proximum (point le plus près) et le punctum remotum (point le plus loin). Un œil emmétrope dit « normal » possède un punctum remotum situé à l'infini ; lorsqu'un observateur regarde un objet situé à l'infini, ses yeux supposés emmétropes sont au repos.

A.2 Pour un œil « normal », schématiser la situation de vision d'un objet à l'infini et donner, dans ce cas, la valeur de la distance focale f'_{∞} de la lentille de l'œil réduit.

A.3 On admet que la distance entre un œil « normal » et son punctum proximum est $\delta = 25$ cm, schématiser la situation de vision d'un objet au punctum proximum et donner la valeur de la distance focale f'_{PP} de la lentille de l'œil réduit dans cette situation.

A.4 À cause de la taille non nulle des récepteurs de l'œil, un observateur voit net des objets situés à des distances différentes pour une même accommodation. La profondeur de champ correspond à l'intervalle de positions dans lequel doit se trouver un objet pour qu'il soit vu net par l'observateur. En négligeant les effets d'aberration et la diffraction, un objet ponctuel est considéré comme net si le rayon de la tache image ρ formée sur le capteur est inférieur au rayon r d'une cellule photosensible de la rétine.

Pour un œil « normal » au repos, et pour un objet ponctuel situé à la distance L de l'œil, proposer une construction des rayons (sans respect de l'échelle) et déterminer le rayon ρ de la tache sur le capteur. Au-delà de quelle distance L_0 exprimée en fonction de f'_{∞} , d (diamètre de la pupille) et r , peut-on dire que l'image est nette ? Commenter l'expression obtenue.

A.5 Calculer L_0 pour $d = 2,0$ mm et $d = 8,0$ mm. Commenter les valeurs numériques.

Pour pouvoir distinguer les détails d'un objet, il ne suffit pas que ce dernier soit situé dans la zone d'accommodation. Il faut aussi que ces détails ne soient pas trop petits. Pour pouvoir séparer deux points de l'image, il faut que ces derniers stimulent deux cellules photosensibles différentes.

A.6 On considère un œil en accommodation maximale, c'est-à-dire regardant un objet situé à son punctum proximum. Quelle est la distance minimale, dans un plan orthogonal à l'axe optique de l'œil, entre deux objets que l'œil peut distinguer ?

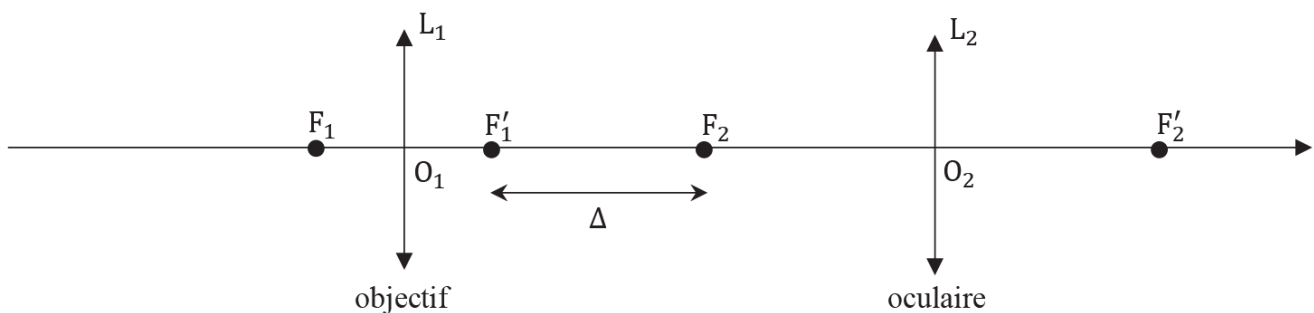
B Le microscope

Afin de voir certains détails inaccessibles à l'œil nu, on utilise des instruments d'optique comme le microscope.

Ce dernier peut être modélisé par deux lentilles minces convergentes de même axe optique (voir Figure ci-dessous) :

- l'objectif de distance focale f'_1 et de centre O_1 ;
- l'oculaire de distance focale f'_2 et de centre O_2 .

On note respectivement F_1 et F'_1 les foyers objet et image de la lentille L_1 et F_2 et F'_2 les foyers objet et image de L_2 . On définit la position relative Δ des deux lentilles par la « distance algébrique » entre les deux foyers : $\overline{F'_1 F_2} = \Delta$



B.1 Énoncer les conditions de l'approximation de Gauss. Pourquoi se place-t-on dans cette approximation ?

B.2 Le microscope est réglé de telle sorte que l'image de l'objet observé à travers l'ensemble du dispositif se forme « à l'infini ». Justifier la raison de ce réglage.

B.3 Sur un schéma, tracer les rayons permettant de construire l'image $A'B'$ située « à l'infini » d'un objet AB obtenue avec ce microscope.

B.4 Sur une documentation commerciale, **l'oculaire** est caractérisé par son grossissement commercial G_2 : rapport entre l'angle sous lequel est vue l'image située à l'infini d'un objet observé à travers l'oculaire seul et l'angle sous lequel est vu ce même objet à l'œil nu lorsqu'il est situé au *punctum proximum*. Pourquoi utilise-t-on la notion de grossissement plutôt que de grandissement ? Illustrer cette notion sur un schéma. Déterminer la distance focale équivalente f'_2 de l'oculaire pour un grossissement commercial $G_2 = 10$.

B.5 **L'objectif** est caractérisé par la valeur absolue de son grandissement γ_1 lorsque l'image A_1B_1 d'un objet AB , à travers l'objectif seul, est située en F_2 . Déterminer la distance focale f'_1 de l'objectif en fonction de Δ et γ_1 . Faire l'application numérique avec $\Delta = 170$ mm et $\gamma_1 = 40$.

B.6 Le grossissement commercial G_c du microscope est la valeur absolue du rapport de l'angle sous lequel on voit l'objet à travers le microscope et l'angle sous lequel on le voit à l'œil nu lorsqu'il est situé au *punctum proximum*. Déterminer, en le justifiant, le grossissement commercial du microscope en fonction G_2 et γ_1 .

B.7 L'ouverture numérique ON d'un microscope est définie par la relation : $ON = n \sin \alpha$, où n est l'indice du milieu dans lequel se trouve l'objectif et α l'angle maximal des rayons issus de l'objet et arrivant sur l'objectif. Une valeur typique pour un objectif placé dans l'air est $ON = 0,75$. Les conditions de Gauss sont-elles respectées ? Comment en pratique remédie-t-on à ce problème ?

La résolution spatiale du microscope correspond à la distance minimale entre deux points de l'objet qui seront discernables avec le microscope.

B.8 En microscopie, si on ne tient pas compte des aberrations géométriques du système optique, la résolution spatiale φ est limitée par la diffraction. Elle peut être donnée par la relation suivante :

$$\varphi = \frac{0,61\lambda}{ON}$$

Donner un ordre de grandeur de φ

B.9 Conclure sur l'utilité du microscope par rapport à l'observation à l'œil nu.

Problème 2 Echographie

Les parties de ce problème ainsi que beaucoup de questions sont largement indépendantes.

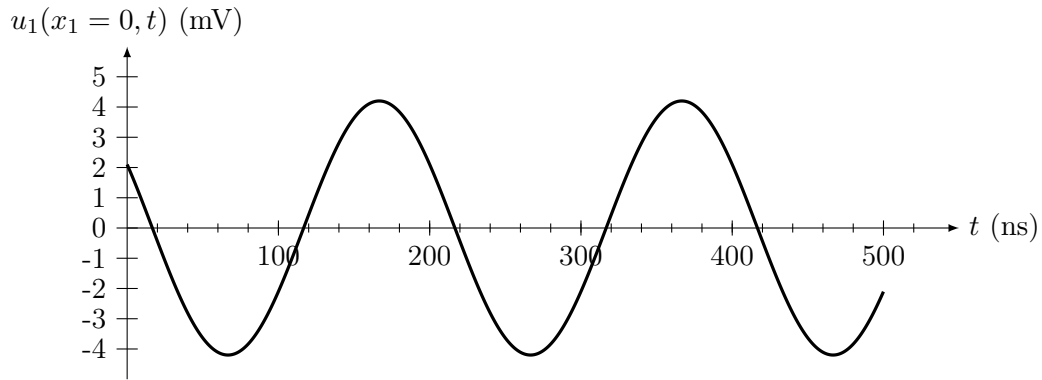
Le corps humain n'étant pas transparent aux ondes lumineuses, on utilise pour imager les organes d'autres ondes comme par exemple les ondes sonores. Aux fréquences utilisées comprises entre 2 et 20 MHz, les seules ondes qui se propagent dans le corps humain sont des ondes de compression. Lorsqu'elles rencontrent une interface entre deux milieux différents, comme par exemple la surface d'un organe, une partie de l'énergie est réfléchie.

A Principe de l'échographie

Les ondes ultrasonores sont utilisées pour réaliser des échographies du corps humain. Cette technique d'imagerie à l'avantage d'être non-invasive.

A.1 Aux fréquences utilisées en échographie médicale (2 à 20 MHz), on peut considérer, pour simplifier, que les tissus mous du corps humain possèdent des propriétés acoustiques voisines de celles de l'eau. La taille des plus petits détails observables sur ces images est de l'ordre de la longueur d'onde. Estimer cette dernière pour la gamme de fréquences considérée en considérant que la vitesse des ondes sonores dans l'eau est de $c_e = 1,5 \times 10^3$ m s⁻¹

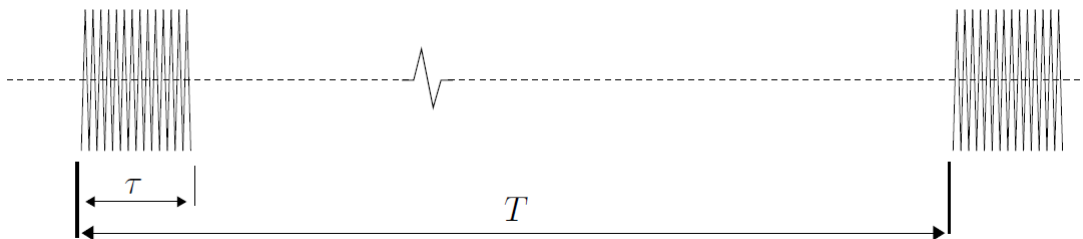
On considère que le signal émis par la sonde échographique est une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation ω se propageant suivant l'axe des x et dont la surpression (grandeur caractéristique de l'onde) a pour expression $p_1(x, t) = P_m \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi \right)$. Une image de ce signal $u_1(t)$, d'amplitude U_m est enregistré au niveau de la sonde échographique en $x = 0$ via un transducteur piézoélectrique et est représenté ci-dessous.



A.2 Déduire de l'oscillogramme les valeurs numériques de U_m , ω , et φ . On explicitera la façon d'obtenir ces valeurs et on veillera à la pertinence des chiffres significatifs proposés. Quel nom donne-t-on à ω ?

A.3 Expliquer pourquoi la sonde échographique ne peut émettre ce signal en continu.

En réalité la sonde échographique émet pendant le fonctionnement des trains d'onde d'une durée τ de façon T -périodique comme représenté sur la figure ci-dessous.



L'onde   mise par la sonde se propage dans les tissus humains puis se réfléchie et se transmet à chaque interface entre deux milieux différents. Les coefficients de réflexion et de transmission dépendent de ces deux milieux. Lorsque l'onde se réfléchie, la sonde échographique reçoit un écho après une durée t_i

A.4 Déterminer la distance d à laquelle se trouvent l'interface entre deux milieux différents connaissant la vitesse de propagation de l'onde c_i dans le premier milieu et la durée t_i entre le moment ou le train d'onde a été émis et la réception de l'écho.

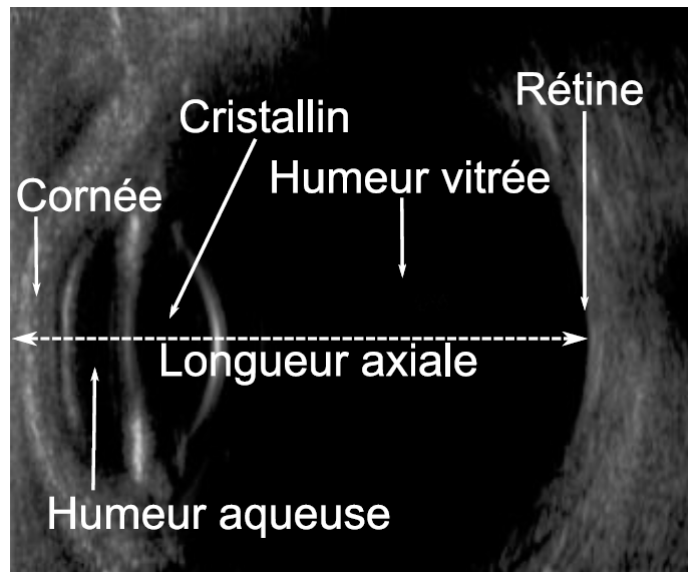
A.5 Montrer qu'il existe une distance minimale d_m et une distance maximale d_M en dehors desquelles on ne peut pas détecter la position d'un changement de milieu. Exprimer ces distances en fonction c_i , τ et T .

B Exploitation d'une échographie de l'œil

Avant l'échographie, pour le confort du patient, le médecin réalise une anesthésie de la cornée à l'aide de quelques gouttes de collyre anesthésique. Il dépose ensuite du gel ophtalmique stérile à la surface de la cornée et balaie cette surface à l'aide d'une sonde émettant des ultrasons de fréquence égale à 10 MHz. En mesurant notamment des durées séparant le signal émis et les signaux reçus après réflexion (les échos) sur les différentes parties de l'œil, un système informatique permet d'obtenir une image en nuances de gris. Les amplitudes les plus importantes des ondes réfléchies sont codées en blanc, les plus faibles sont codées en noir.

On peut ainsi mesurer la distance séparant la cornée de la rétine, appelée longueur axiale de l'œil. La longueur axiale d'un œil normal est comprise entre 22 et 24 mm. En d     de 22 mm, l'œil est trop court, il est hypermétrope. Au-delà de 24 mm, l'œil est trop long, il est myope.

La figure ci-dessous montre une image échographique de l'œil, d'après <https://www.ultrasoundpaedia.com/>



Le tableau ci-dessous reconstitue des données échographiques de l'œil, d'après le journal de radiologie (vol. 87), Échographie de l'œil et de l'orbite avec un échographe polyvalent

Milieu traversé	Cornée	Humeur aqueuse	Cristallin	Humeur vitrée
Célérité des ultrasons (m s^{-1})	1620	1532	1641	1532
Durée nécessaire à la réception des principaux échos par la sonde (μs)	0.6	3.6	9.2	27.0

- B.1** Quelle sont les caractéristiques (mécanique, transverses, longitudinales. . .) des ondes utilisées pour réaliser ce diagnostic ?
- B.2** Déterminer la longueur d'onde des ondes utilisées lorsqu'elles traversent l'humeur vitrée.
- B.3** Expliquer qualitativement, à l'aide d'un schéma, l'origine de ces quatre échos. On suppose que le gel permet à l'onde ultrasonore de pénétrer dans la cornée sans réflexion sur sa face avant.
- B.4** Cet œil est-il hypermétrope ? *Cette question est une question ouverte, sa résolution demande un peu de temps et d'explications ; le barème en tiendra compte.*

C Echographie Doppler

Les échographes peuvent superposer à l'image standard une visualisation des flux sanguins grâce à une mesure de vitesse en utilisant l'effet Doppler.

On considère un émetteur fixe d'ondes ultrasonores et un récepteur se déplaçant sur l'axe (Ox) à la vitesse $\vec{v}$.



L'émetteur émet une onde monochromatique de fréquence f_{em} se propageant à la vitesse c dans le milieu. Le récepteur initialement à une distance D reçoit une onde de fréquence f_{rec} alors qu'il se rapproche de l'émetteur.

- C.1** Écrire l'expression $s_e(t)$ de l'onde émise en fonction de f_{em} . On supposera que son amplitude est notée A et que sa phase à l'origine est prise nulle.
- C.2** En déduire l'expression du signal reçu $s_r(x, t)$ à une distance x de l'émetteur puis l'expression du signal reçu par le récepteur uniquement en fonction du temps, de A , D , v , et c . Expliciter alors l'expression de f_{rec} .
- C.3** Établir l'expression de l'écart de fréquence $\Delta f = f_{rec} - f_{em}$ entre l'émission et la réception en fonction de v , c et f_{em} .

Dans le cas médical, la sonde échographique est fixe et joue le rôle de l'émetteur et du récepteur. Les globules présents dans le sang réfléchissent l'onde ultrasonore.

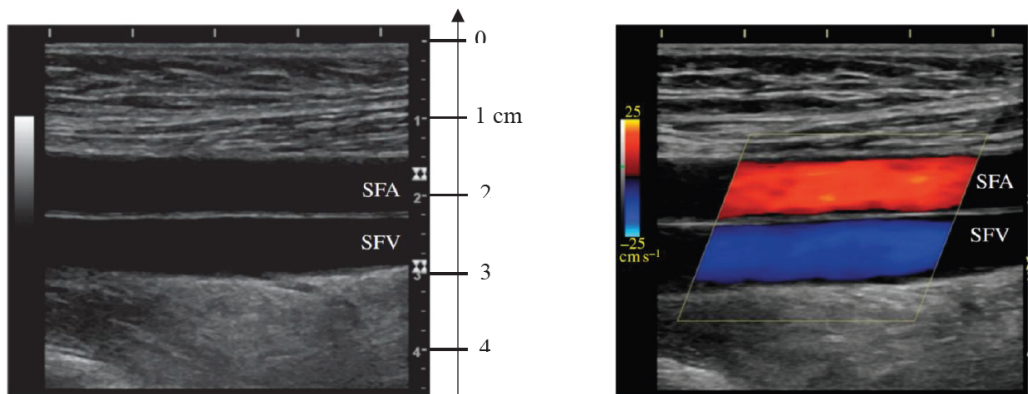


Le réflecteur se déplace sur l'axe (Ox) à la vitesse $\vec{v}$

C.4 Montrer que dans ce cas l'écart de fréquence entre les signaux émis et reçus par la sonde échographique $\Delta f_{tot} \approx f_{em} \frac{2v}{c}$ en utilisant le fait que $v \ll c$. On pourra utiliser que $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \ll 1$.

C.5 Faire l'application numérique de ce décalage en fréquence si on considère une onde ultrasonore de fréquence $f_{em} = 2,0 \text{ MHz}$ se propageant dans un milieu à la vitesse $c = 1,5 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$ et un réflecteur se déplaçant à la vitesse $v = 5,0 \text{ cm s}^{-1}$.

À gauche de la figure ci-dessous on observe une image échographique de l'artère (SFA : superficial femoral artery) et de la veine (SFV : superficial femoral vein) fémorales. La sonde échographique a été placée au-dessus de la zone imagée. À droite de la figure on observe la superposition de l'image échographique et des informations Doppler. Ces dernières sont obtenues en faisant une nouvelle acquisition de signal en inclinant la sonde par rapport à la première configuration. L'échelle verticale sur la droite est en centimètres.



C.6 Décrire les écoulements observés. Que se passe-t-il au voisinage des parois des veines et des artères ?

Problème 3 Étude d'un système autofocus d'appareil photo numérique

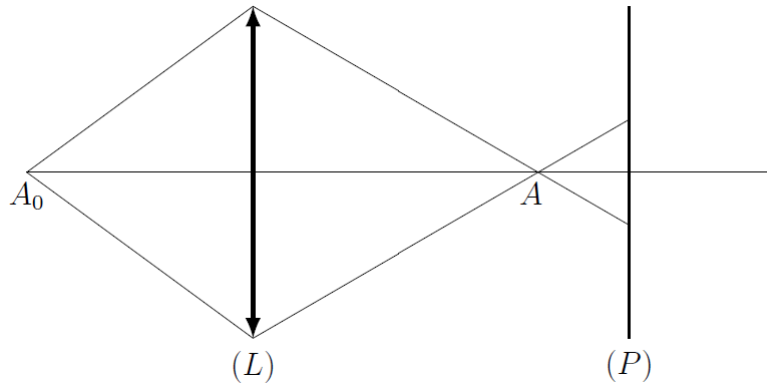
Les applications numériques seront données avec 2 chiffres significatifs, sauf contre ordre.

Nous nous intéressons dans ce sujet à l'étude de différentes méthodes permettant de réaliser l'autofocus sur les appareils photos numériques. L'autofocus consiste à régler de manière automatique la netteté de l'image avant d'effectuer la prise de vue.

Un appareil photo est modélisé par une lentille mince convergente (L), l'objectif, de focale $f'_0 = 10 \text{ cm}$ et un plan récepteur (P) placé orthogonalement à l'axe optique. Ce plan récepteur est de taille $20 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ et contient 6 méga pixels.

Lorsque le réglage de l'appareil est optimal, l'image de l'objet à photographier se trouve sur le plan (P). Sinon, il convient de modifier la position de ce plan.

Prenons l'exemple d'un objet réduit à un point objet A_0 qui donne un point image A . En cas de défaut de réglage, on a la situation décrite sur la figure ci-dessous.



Sur (P) se forme alors une tache à la différence d'un point. Il faut donc déplacer le plan (P) d'une certaine distance pour obtenir une image nette. Pour cela, la méthode la plus rapide consiste à calculer cette distance à partir de la différence d'ordonnées des points inférieurs et supérieurs de la tache.

Il y a cependant une difficulté du fait que l'on obtient la même tache que (P) soit placé devant ou derrière l'image. Nous allons étudier un dispositif astucieux qui permet de calculer algébriquement le déplacement à opérer partant d'un défaut de réglage.

A Mise au point

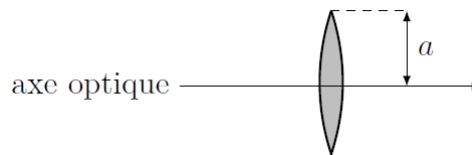
Dans cette partie on attend, pour chaque question, une expression littérale puis une valeur numérique.

On souhaite photographier un objet de hauteur $h = 10$ cm, transverse à l'axe de l'objectif et situé à une position $x_0 = -2,0$ m, l'origine étant prise au centre de la lentille (L) . L'axe optique est orienté de la gauche vers la droite.

A.1 À quelle distance d' du centre de la lentille (L) faut-il placer (P) pour avoir une image nette (ceci définit la position P_0) ? Pourquoi peut-on confondre cette position P_0 avec le plan focal image de la lentille ?

A.2 Déterminer la taille h' de l'image.

On se place dans le cas où l'objet précédent se ramène à un point situé sur l'axe toujours à la position $x_0 = -2,0$ m. (P) est placé à une distance $\delta = 0,50$ cm derrière P_0 . La lentille a un rayon $a = 5,0$ cm (figure ci-dessous). On observe alors une tache lumineuse sur (P) .



Le rayon de la lentille a est défini par la hauteur de lentille par rapport à l'axe optique (figure ci-dessus).

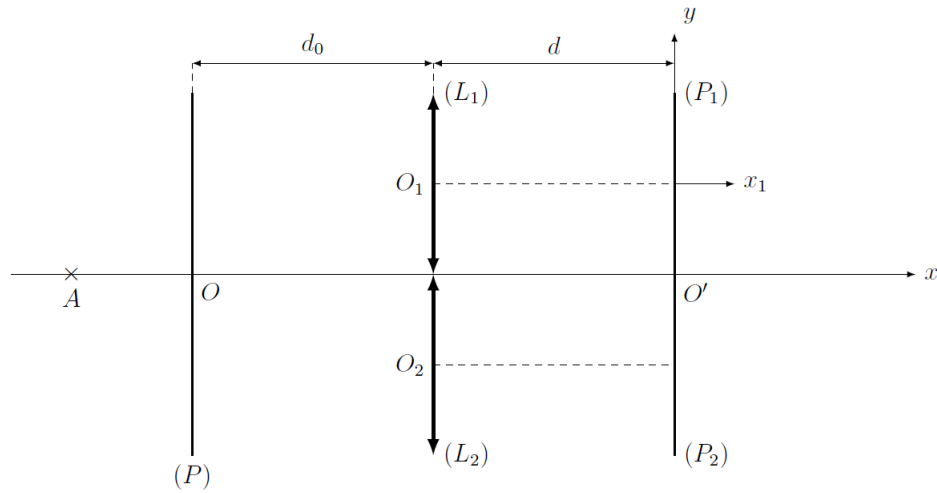
A.3 Faire un schéma et tracer les rayons qui parviennent à l'extrémité de cette tache. Déterminer le rayon a' de la tache lumineuse formée sur (P) .

A.4 Après avoir déterminé la taille d'un pixel, supposé carré, donner un critère sur a' , puis sur δ pour que l'image transmise par le capteur soit nette.

B Principe simplifié de l'autofocus

Dans un souci de simplification on considère un objet réduit à un point objet situé sur l'axe de la lentille (L) qui donne un point image noté A .

Pour déterminer si A se trouve ou non sur (P) on utilise deux lentilles annexes (L_1) et (L_2) , situées à une distance d_0 de (P) , de focale f' et de rayon a auxquelles sont associées des capteurs plans (P_1) et (P_2) situés à une distance d de chaque lentille. (P_1) (respectivement (P_2)) est conjugué de (P) par (L_1) (respectivement (L_2)). Attention : en réalité les deux lentilles sont désaxées par rapport à l'axe optique de (L) , les rayons étant déviés par des miroirs. Ici, on considère simplement que tout se passe comme si (P) est transparent. Le schéma est représenté sur la figure ci-dessous.



B.1 Exprimer d en fonction de d_0 et f' .

B.2 On se place dans le cas où A est sur (P) . On note A_1 son image par (L_1) . Faire un schéma représentant A , A_1 , F'_1 (le foyer image de (L_1)) et les rayons issus de A passant par les bords inférieurs et supérieurs de (L_1) .

B.3 Déterminer l'ordonnée y_1 de A_1 en prenant l'origine O' située sur l'axe (Ox) (on pourra préalablement déterminer l'ordonnée par rapport à l'axe optique de la lentille (L_1)). En déduire l'expression de y_2 l'ordonnée de A_2 l'image de A par (L_2) en prenant également l'origine en O' .

B.4 Calculer $\Delta\Phi_0 = y_1 - y_2$ (appelé différence de phase, même si c'est une longueur) que l'on exprimera en fonction de d_0 , d et a .

On se place dans le cas où A est avant le plan (P) (cas de la figure ci-dessus) et on pose $\overline{OA} = p$ (mesure algébrique). On note à nouveau A_1 l'image de A par (L_1) .

B.5 Construire A_1 sur le document réponse. On note x_1 l'abscisse de A_1 mesurée sur l'axe (O_1x_1) que l'on ne cherchera pas à exprimer et qui sera donc considérée comme une donnée. Déterminer son ordonnée y_1 mesurée à partir de l'axe (Ox) en fonction de a , x_1 , d_0 et p .

B.6 Sur le document réponse, tracer les rayons issus de A passant par les extrémités des lentilles (L_1) et (L_2) .

On obtient donc une tache lumineuse. On note y_s l'ordonnée du point supérieur de la tache lumineuse sur (P_1) et y_i l'ordonnée du point inférieur de cette tache, l'origine étant en O' sur l'axe (Ox) .

B.7 En utilisant le théorème de Thalès, exprimer y_s en fonction de y_1 , x_1 et d et montrer que $y_i = 2a \left(1 - \frac{d}{x_1}\right) + \frac{y_1 d}{x_1}$.

Le principe de la méthode est de mesurer ce qui est appelé « la différence de phase » définie par $\Delta\Phi = y_s - y'_s$ où y'_s est l'ordonnée du point supérieur de la tache lumineuse sur (P_2) . Ce qui revient à déterminer $\Delta\Phi = y_s + y_i$.

B.8 Pourquoi a-t-on $y_i = -y'_s$? Montrer que $\Delta\Phi = 2a + \frac{2ad}{d_0 - p}$.

B.9 Évaluer la différence de phase entre le cas où la mise au point n'est pas réalisée et celui où elle l'est. Soit $\Delta^2\Phi = \Delta\Phi - \Delta\Phi_0$.

Le principe de l'autofocus consiste donc à mesurer la différence de phase et d'en déduire p . Il suffit ensuite de déplacer la lentille (L) afin de faire coïncider A sur (P) . Le déplacement de la lentille se fait au moyen d'un moteur.

B.10 On mesure $\Delta^2\Phi = 0,66 \text{ cm}$. Donner la distance de laquelle on doit translater (P) pour obtenir une image nette. On précisera la direction (*non précisé par l'énoncé original : « et le sens » !*) de la translation. On a $d = 2f'$ et $d_0 = 2f'$ avec $f' = 10 \text{ cm}$ et $a = 3,0 \text{ cm}$.

Pour un objet étendu orthogonal à l'axe, on peut montrer que la différence de phase due à chaque point source de l'objet est identique. Le principe de la méthode peut alors être généralisé.

Nom :

Document réponse

