

Durée de l'épreuve : 3h

Les 4 problèmes sont indépendants

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **redaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation **des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème 1: Etude d'une microbalance à cristal de quartz

Le quartz, de formule brute SiO_2 est un matériau dur, fragile et transparent, de masse volumique $\rho_q = 2,65 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. C'est un matériau piézoélectrique. Si on considère un morceau taillé de cristal de quartz et que l'on impose une tension électrique à ses bornes, le matériau réagit en subissant une contrainte mécanique. Inversement, si l'on soumet le quartz à une contrainte mécanique, une tension électrique apparaît entre ses bornes.

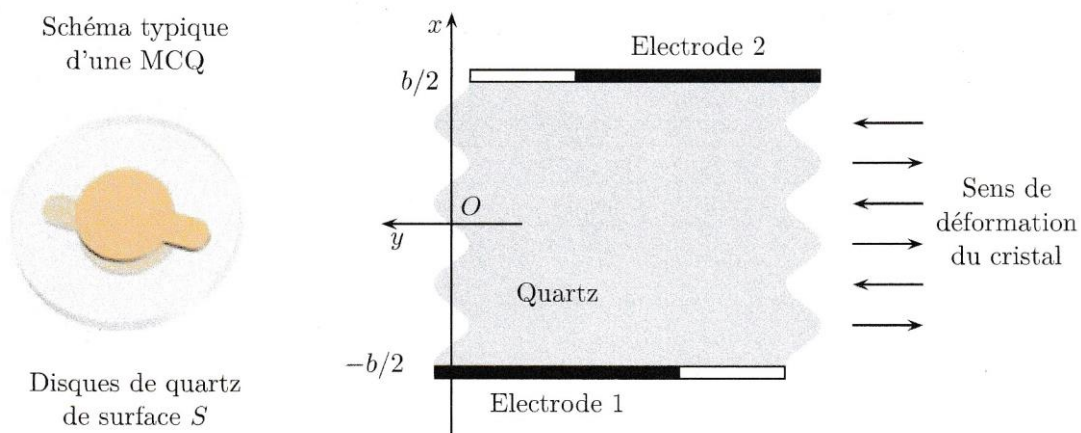


Schéma d'une microbalance à quartz et modélisation des modes de résonance au sein du cristal.

La structure cristalline du quartz lui confère de très bonnes propriétés de résonance. Si l'on applique une tension électrique alternative au quartz à une fréquence proche de sa fréquence propre f_0 on provoque l'apparition d'ondes progressives de cisaillement dans le cristal, analogues à des ondes sismiques, de célérité $c_q = 3,34 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dont l'amplitude peut devenir très importante et qui déforment le cristal. On a représenté sur la figure précédente un exemple de microbalance à cristal de quartz (MBQ) et le type de résonance observée lorsqu'une tension sinusoïdale de la forme $U(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ est appliquée au cristal. Il s'agit du même type d'ondes que celles observées sur une corde vibrante.

On considère une corde tendue horizontalement d'axe (Ox) . Deux ondes transverses s'y propagent en sens opposé l'une de l'autre, les elongations transversales de ces ondes sont modélisées par les équations:

$$y_+(x, t) = Y_m \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \text{ et } y_-(x, t) = Y_m \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right)$$

- 1) Quelle relation existe-t-il, pour une onde progressive sinusoïdale entre T , λ et c_q ?
- 2) Dans quel sens se propage l'onde $y_+(x, t)$? Justifier.
- 3) Sachant qu'en tout point de la corde et à tout instant les déformations dues aux ondes s'additionnent, on admet que l'onde y_r résultant de la superposition de y_- et y_+ s'écrit :

$$y_r(x, t) = y_-(x, t) + y_+(x, t) = Y_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T}\right) + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Déterminer l'expression de Y_0 .

Dans le cas du cristal de quartz, d'épaisseur b , on montre que la déformation transverse prend la forme de l'équation précédente et s'écrit :

$$y_r(x, t) = Y_0(x) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T}\right) + \frac{\varphi}{2}\right)$$

où $Y_0(x) = Y_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\varphi}{2}\right)$ représente l'amplitude de la déformation en un point d'abscisse x .

La symétrie de l'excitation du système impose que la déformation est nulle à tout instant en $x = 0$ et que son amplitude $Y_0(x)$ est maximale en $x = \pm \frac{b}{2}$.

4) Déterminer la valeur de φ .

5) Montrer que les conditions limites en $x = \pm \frac{b}{2}$ imposent une quantification des valeurs de la longueur d'onde donnant lieu à un phénomène de résonance, celles-ci ne pouvant prendre que les valeurs :

$$\lambda_p = \frac{2 \cdot b}{2 \cdot p + 1}$$

avec $p \in \mathbb{N}$.

6) On note f_q la fréquence de résonance fondamentale correspondant à $p = 0$. Calculer l'épaisseur b du cristal donnant lieu à une fréquence fondamentale de 5,00 MHz.

On considère dans la suite du problème que le cristal de quartz est taillé de manière à posséder une fréquence fondamentale de 5,00 MHz. On dépose à présent un film homogène de masse M_f de manière uniforme à la surface S du résonateur à quartz étudié ci-dessus. Dans le cas où M_f est négligeable devant M_q , la masse du cristal de quartz résonant, Günter Sauerbrey montra en 1959 que la fréquence fondamentale du quartz était déplacée d'une quantité δf_q vérifiant la relation :

$$\frac{\delta f_q}{f_q} = - \frac{M_f}{M_q}$$

On introduit les masses par unité de surface $m_f = \frac{M_f}{S}$ et $m_q = \frac{M_q}{S}$

7) Exprimer m_q en fonction de ρ_q et b .

8) En déduire que :

$$\frac{\delta f_q}{f_q} = - \frac{2 \cdot m_f \cdot f_q}{\rho_q \cdot c_q}$$

9) Calculer la valeur de m_f donnant lieu à un décalage en fréquence de 1,00 Hz. On exprimera le résultat en $\text{ng} \cdot \text{cm}^{-2}$.

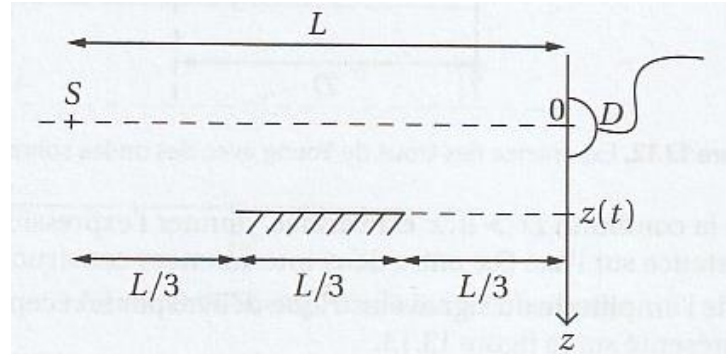
En considérant que la masse volumique du matériau déposé est d'environ $3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, estimer l'ordre de grandeur de l'épaisseur du dépôt. Commenter.

10) Outre l'extrême sensibilité de cette méthode à la masse déposée, quels avantages présentent l'utilisation d'une microbalance à quartz ?

11) Quels inconvénients doit-on cependant prendre en compte dans le cadre d'un dépôt multicouches ?

Problème 2 : Mesure du champ de pesanteur à l'aide d'un miroir de Lloyd

On dispose une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 650 \text{ nm}$ à une distance horizontale $L = 45,0 \text{ cm}$ d'un détecteur D . Initialement, un miroir de longueur $L/3 = 15,0 \text{ cm}$ positionné à égale distance de S et D se trouve en $z = 0$ (même côte que S et D). On lâche ce miroir à $t = 0$ sans vitesse initiale. Il ne subit que les effets de la pesanteur. La réflexion sur un miroir métallique s'accompagne d'un retard de phase égale à π . L'indice optique de l'air est supposé égal à 1,00.



- 1) Pour une position $z(t)$ du miroir, représenter les deux rayons qui interfèrent au point D de l'écran (l'un issu directement de S et l'autre ayant subi une réflexion sur le miroir).
- 2) Le rayon réfléchi par le miroir parcourt une plus grande distance que celui qui arrive directement en D . On note δ_D la différence de marche entre ces deux rayons. Quelle relation existe-t-il entre le déphasage $\varphi(t)$ et la différence de marche entre ces deux rayons au point D ? Justifier.
- 3) On note S' l'image de S par le miroir. Nous admettons que la différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent en D est :

$$\delta_D = (S'D) - (SD)$$

où (SD) et $(S'D)$ sont les chemins optiques empruntés par les deux rayons.

Déterminer la différence de marche δ_D en fonction de L , $z(t)$ et de λ (en tenant compte du fait que le rayon réfléchi par le miroir est déphasé de π).

- 4) On rappelle que pour $\varepsilon \ll 1$, $\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \varepsilon/2$. En supposant que $L \gg z(t)$, montrer que la différence de marche s'écrit :

$$\delta_D = \frac{2 \cdot z^2(t)}{L} + \frac{\lambda}{2}$$

- 5) On note A l'amplitude de la vibration lumineuse émise par une source. On fait l'hypothèse que les deux rayons possèdent la même amplitude. L'amplitude de la vibration résultante en D est donnée par la formule des interférences :

$$A_D(t) = \sqrt{2 \cdot A^2 + 2 \cdot A^2 \cdot \cos \varphi(t)}$$

A quelle condition sur $\varphi(t)$ puis sur δ_D les interférences sont-elles constructives en D ? A quelle condition (sur $\varphi(t)$ puis sur δ_D) les interférences sont-elles destructives en D ?

L'intensité lumineuse en D vérifie la relation de Fresnel : $I_D(t) = 2 \cdot I_0 \cdot (1 + \cos \varphi(t))$.

- 6) Sachant que le miroir est en chute libre dans le champ de pesanteur, déterminer $z(t)$ puis exprimer $I_D(t)$ en fonction du temps.

- 7) Quelle est l'intensité en D à $t = 0$? Commenter.

- 8) Déterminer l'expression de l'instant t_n auquel est observé le $n^{\text{ième}}$ maximum d'intensité en D .

- 9) On donne dans le tableau ci-dessous l'instant t_n auquel est observé le $n^{\text{ième}}$ maximum d'intensité par le détecteur D :

rang n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_n (en ms)	7,42	9,77	11,11	12,08	12,86	13,53	14,10	14,62	15,00

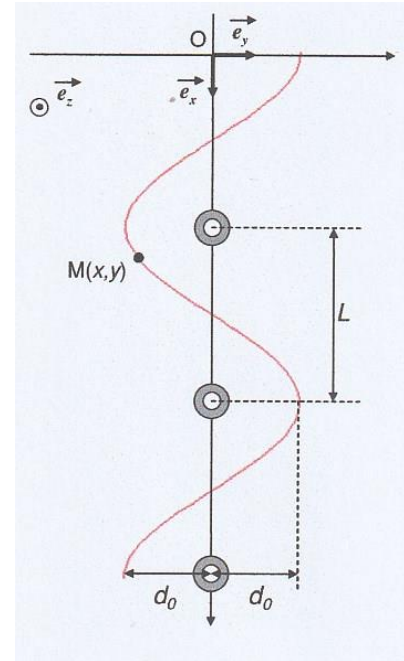
A l'aide du tableau de valeurs fourni, estimer la valeur de g . Décrivez précisément la méthode utilisée pour déterminer g . Quelles sont les sources éventuelles d'incertitudes ? Commenter.

Problème 3 : Expériences de cinématique avec un skieur...

A-Première partie : Super G

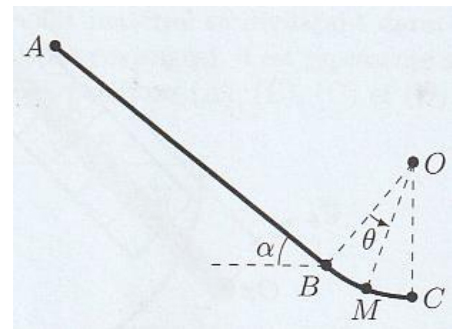
Lors d'une descente de super G, un skieur repéré par le point M de coordonnées (x, y) dans le référentiel $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ part du point $(0, d_0)$ puis est astreint à suivre une trajectoire sinusoïdale de slalom entre des portes espacées d'une distance L de manière à conserver à tout moment une vitesse dont la composante suivant Ox est constante : $\dot{x} = v_0 = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

- 1) Expliquer en quelques mots, en quoi consiste la cinématique du point.
- 2) La trajectoire se met sous la forme $y(x) = A \cdot \cos(B \cdot x)$. Exprimer A et B en fonction de d_0 et L .
- 3) Exprimer $x(t)$ puis $y(t)$.
- 4) En déduire les expressions des vecteurs vitesse et accélération du skieur.
- 5) Pour que le skieur reste en piste, il doit conserver à tout moment une accélération inférieure à $0,70 \cdot g$. (avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). A quelle distance minimum $L_{\min}$ doit-on placer les portes. On donne $d_0 = 3,0 \text{ m}$. Faire l'application numérique.



B-Deuxième partie : Saut à ski

Le skieur s'élance en A sur un tremplin constitué de deux parties représentées en coupe sur la figure ci-contre. Le skieur est assimilé à un point M glissant dans le plan vertical de la figure. Le début de la piste entre A et B est rectiligne, de longueur $L = AB = 60 \text{ m}$ et de pente caractérisée par l'angle $\alpha = 35^\circ$. La fin de la piste entre B et C est assimilée à un arc de cercle de rayon $R = 10 \text{ m}$. Nous nous limitons à l'étude de la phase d'élan. Le skieur s'élance en A à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale. Entre A et B son mouvement est rectiligne et uniformément accéléré, d'accélération de norme $a_0 = 5,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



- 1) Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{v}(M)$ et position $\overrightarrow{AM}(t)$ du skieur à chaque instant au cours de cette première phase.
- 2) A quel instant le skieur arrive-t-il en B ? Quelle est alors la norme v_B de sa vitesse ?

Entre B et C le mouvement de M est circulaire et l'angle θ permet de repérer sa position. La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ dépend de θ selon la loi $\dot{\theta} = \omega_0 \cdot \sqrt{\cos(\alpha - \theta) + \beta}$ où $\omega_0 = 1,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et β est une constante.

- 3) En utilisant les conditions aux limites en $\theta = 0$, déterminer la constante β .
- 4) Etablissez les expressions de la vitesse et de l'accélération de M dans la base de coordonnées polaires.
- 5) Montrer que :

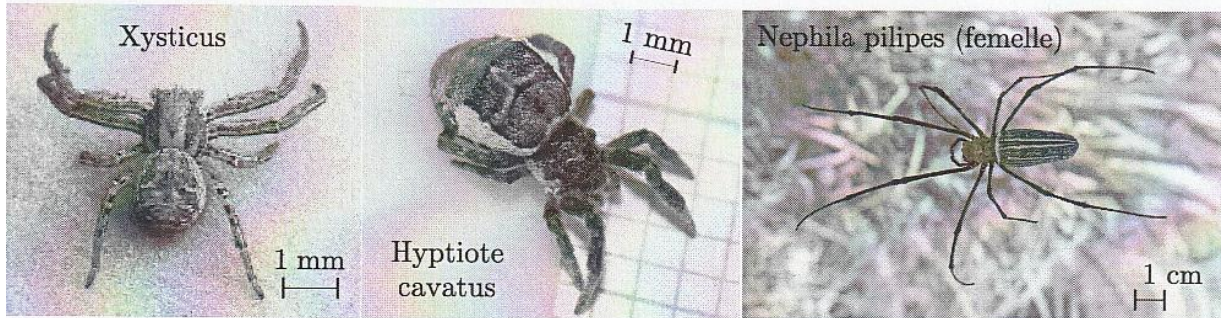
$$\vec{a}(M) = \frac{R \cdot \omega_0^2}{2} \sin(\alpha - \theta) \cdot \vec{u}_\theta - R \cdot \omega_0^2 \cdot (\cos(\alpha - \theta) + \beta) \cdot \vec{u}_r$$

Qualifier le mouvement de M entre B et C

- 6) Déterminer la norme v_C de la vitesse du skieur en C.

Problème n°4 : A propos des araignées...

Les araignées ou aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. A ce jour, plus de 47000 espèces subdivisées en 117 familles sont répertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varie typiquement de 1 jusqu'à $70 \mu\text{m}$. A diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. L'objectif de ce problème est d'étudier les propriétés mécaniques des fils d'araignées...



A. Détermination expérimentale de la constante de raideur d'un fil de soie

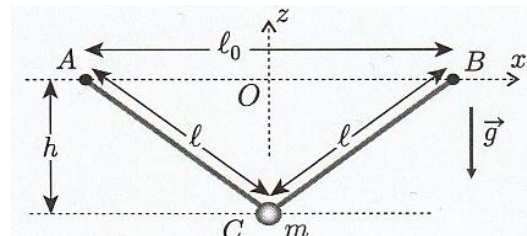
L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale l_0 de section S_0 soumis à une force de traction d'intensité F est donnée, dans le régime des faibles élongations, par la loi de Hooke :

$$\frac{\delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0}$$

où E est le module de Young du matériau constituant le fil.

- 1) Quelle est la dimension de E ?
- 2) Dans ce régime de comportement mécanique, un fil de soie peut être assimilé à un ressort de constante de raideur k . Si on assimile δl à l'allongement du ressort, exprimer k en fonction de E , S_0 et de l_0 .

Pour mesurer le module de Young d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple. Le fil de longueur l_0 est attaché en deux points fixes A et B distants de l_0 et situés sur une même horizontale (cf figure ci-contre). Une masse m est suspendue au point C milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur l .



On mesure alors la hauteur h dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale.

- 3) On considère un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . On note $l(t)$ la longueur du ressort à un instant t donné. Donner l'expression de la force de rappel $\vec{F}$ (donnée par la loi de Hooke) exercée par un ressort sur un point matériel M en fonction de k , $l(t)$, l_0 et d'un vecteur unitaire à définir. Illustrer cette force sur un schéma.
- 4) Sur la figure présentée ci-dessus, nous admettrons que le fil de soie est équivalent à deux ressorts de longueur à vide $l_0/2$ et de constante de raideur $k' = 2 \cdot k$. Donner l'expression de la force $\vec{F}_1$ exercée par le premier ressort (situé à gauche de la masse m) sur la masse m , en fonction de k , l , l_0 et du vecteur $\overrightarrow{AC}$. De la même manière, exprimer la force $\vec{F}_2$ exercée par le deuxième ressort sur la masse m , en fonction de k , l , l_0 et du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- 5) Montrer qu'à l'équilibre, le système vérifie la relation suivante :

$$4. k. h. \left(1 - \frac{l_0}{2.l}\right) = m. g$$

6) On rappelle que pour $\varepsilon \ll 1$, $\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \varepsilon/2$. En supposant que $h \ll \frac{l_0}{2}$ montrer que la relation précédente se ramène à :

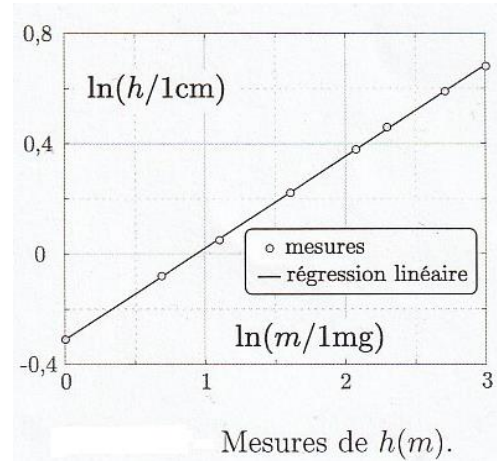
$$\frac{8. k. h^3}{l_0^2} = m. g$$

Cette relation constitue la loi de puissance (vérifiée lorsque la masse m est suffisamment faible) qui relie h à m et aux autres variables du problème.

La figure ci-contre reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec un fil de longueur $l_0 = 5,0$ cm et de rayon $a = 5,0 \mu\text{m}$ et différentes masses suspendues.

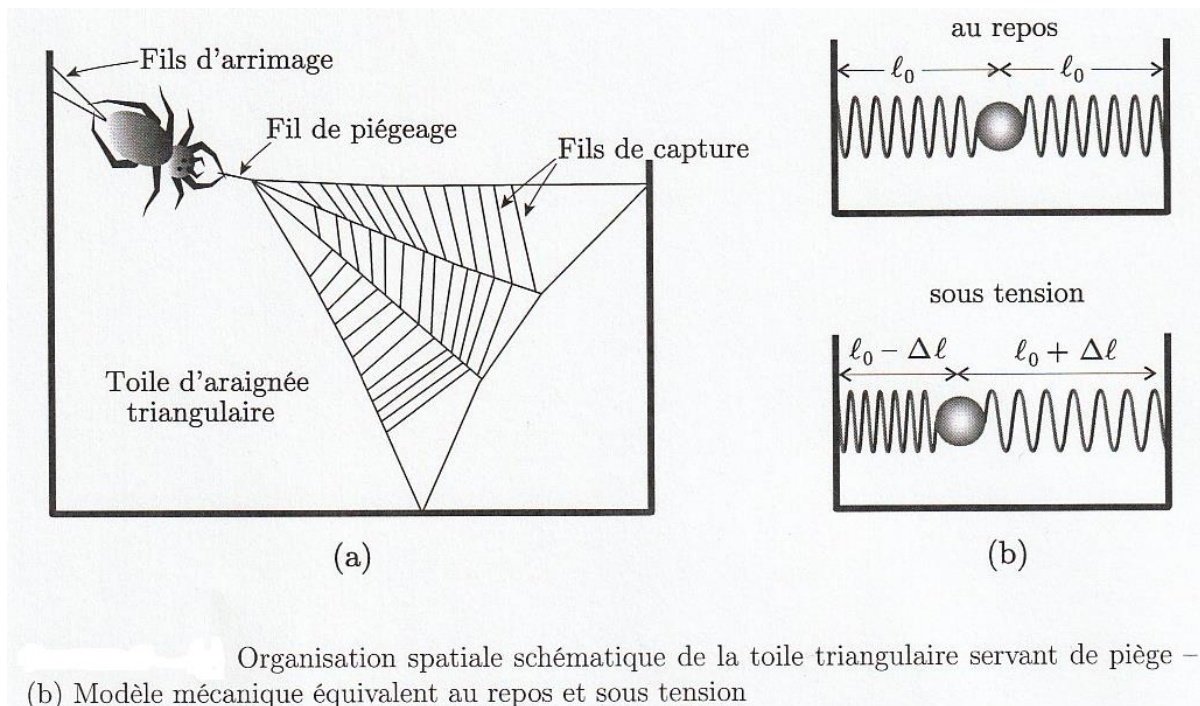
On donne $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

7) Vérifier que cette loi est compatible avec l'expérience. Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent au fil. En déduire une estimation de la valeur numérique du module de Young du fil.



B. Etude dynamique

L'araignée *Hyptiote cavatus*, qui possède une masse d'environ 7 mg, utilise ses muscles pour enrouler l'un des fils afin de tendre la toile, comme on utilise son bras pour tendre la corde d'un arc. Elle garde alors cette tension jusqu'à ce qu'une proie entre en contact avec la toile. Quand elle relâche la tension, la toile subit alors une très forte accélération puis s'emmêle autour de l'insecte proie, ce qui marque le début du processus de capture. La vitesse de l'araignée qui reste accrochée à la toile atteint alors une valeur maximale d'environ $v_{max} = 3 \text{ m.s}^{-1}$ en ayant subi une accélération maximale prodigieuse $a_{max} = 8.10^2 \text{ m.s}^{-2}$.

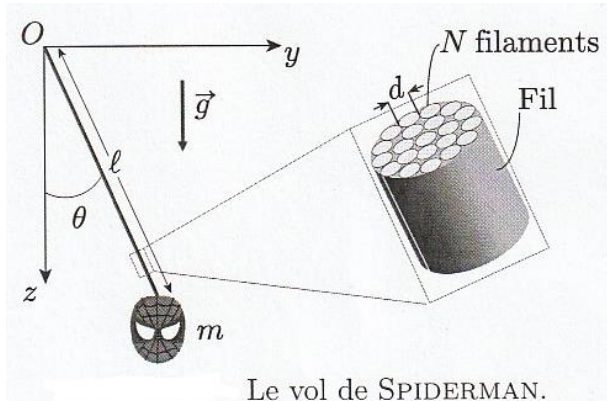


8) On modélise la toile par un simple fil de soie dont on néglige la masse devant celle de l'araignée. A partir de la modélisation proposée ci-dessus, montrer que ceci revient à supposer que l'araignée est

soumise à une seule force de rappel de constante de raideur $2.k$. En supposant que l'araignée soit assimilable à un oscillateur harmonique, exprimer l'allongement maximum Δl_{max} du fil en fonction de v_{max} et a_{max} , ainsi que sa raideur k en fonction de m, v_{max} et a_{max} .

9) Par analyse dimensionnelle, exprimer la puissance mécanique instantanée maximale P_{max} développée pendant le processus de capture, en fonction de m, v_{max} et a_{max} . Sachant que la puissance massique musculaire maximale que peuvent fournir les arthropodes est d'environ $P = 326 \text{ W.kg}^{-1}$ par kilogramme de muscle, estimer la masse de muscle nécessaire qu'il faudrait à notre araignée pour réaliser ce processus de capture sans aide extérieure. Conclure.

Dans les films, le super-héros SPIDERMAN, dont on estime la masse $m = 75 \text{ kg}$, poursuit les voitures en se balançant sur des fils d'immeuble en immeuble. Il attache son fil supposé inextensible, de masse négligeable et de longueur $l = 25 \text{ m}$ sur un point de l'immeuble situé en face, à l'horizontale par rapport à sa position. Dans ces conditions on a donc $\theta(0) = \pi/2$. Il se laisse alors entrainer sans vitesse initiale.



10) Ecrire les équations du mouvement de SPIDERMAN. En déduire, en fonction de m et g , l'expression de la tension maximale que doit supporter ce fil si l'on suppose qu'il est inextensible.

On suppose que le fil que tisse SPIDERMAN est constitué en réalité de N filaments de soie identiques assemblés en parallèle.

11) Déterminer la constante de raideur du ressort équivalent à N ressorts identiques de constante de raideur k disposés en parallèles.

Sachant que le module de Young d'un filament de soie et son rayon valent respectivement $E = 10 \text{ MPa}$ et $a = 5,0 \mu\text{m}$, combien de filaments le fil doit-il comporter au minimum pour que les filaments ne supportent pas une déformation supérieure à 1 % et donc pouvoir supporter SPIDERMAN lors de son vol ? Est-ce cohérent avec le diamètre des fils, de l'ordre du centimètre, produits par SPIDERMAN dans les films ?