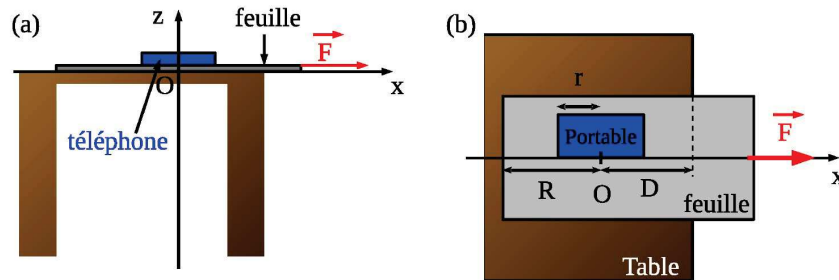


Exercice 1 Résolution de problème : Retirer une nappe sans faire tomber la vaisselle

S'appropriier le problème

On travaille dans le référentiel R lié à la table (terrestre), supposé galiléen. On commence par schématiser la situation sur la Figure ci-dessous. On appelle O , origine de l'axe horizontal (axe (Ox)), la position initiale du centre d'inertie du téléphone portable. Les distances caractéristiques R , r et D sont représentées sur la vue de dessus (b).



On appelle m la masse de la feuille, M celle du téléphone et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, l'intensité du champ de pesanteur. On note $\vec{F} = F\vec{u}_x$ ($F > 0$) la force exercée par l'opérateur sur la feuille. On suppose que cette force est nulle pour $t < 0$ puis constante (réponse à un échelon). On notera μ le coefficient de frottement du téléphone sur la feuille de papier. On négligera la différence entre coefficient statique et dynamique. Concernant les valeurs numériques, on prend $m = 5 \text{ g}$ et pour le téléphone $M = 100 \text{ g}$.

Enfin, on peut considérer que μ est compris entre 0,2 et 0,4. Pour obtenir cet ordre de grandeur, on peut poser son téléphone sur un papier, posé lui-même sur un cahier rigide horizontal. On incline l'ensemble d'un angle α . Si le téléphone glisse pour un angle α_c , on a $\mu = \tan \alpha_c$. Expérimentalement, on obtient des angles α_c entre 10° et 20° , soit $0,18 < \alpha_c < 0,36$.

On considérera un mouvement à un seul degré de liberté le long de l'axe (Ox) confondu avec la droite d'action de la force $\vec{F}$, comme le montre la figure (a).

Analyse et réalisation

PFD au système téléphone

On considère le système téléphone assimilé à un point matériel dans le référentiel de la table. Le téléphone est soumis à son poids $\vec{P} = -Mg\vec{u}_z$, la réaction de la feuille sur le téléphone : $\vec{R}_{f \rightarrow t} = N\vec{u}_z + T\vec{u}_x$. Tant que le téléphone ne décolle pas, on a $N > 0$ et T est algébrique. La projection du PFD selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ donne :

$$M\ddot{x}_t = T \quad (1)$$

$$0 = N - Mg \quad (2)$$

A partir des relations (2) et (4) on obtient $N = Mg$ et $N_t = (M + m)g$; la composante normale de l'action de la table compense le poids de l'ensemble {téléphone, feuille}.

Condition de glissement du téléphone sur la feuille

Dans un premier temps, il faut nécessairement que le téléphone glisse sur la feuille. À partir de $t = 0$, on suppose qu'il n'y a pas glissement du téléphone sur la feuille. On a donc $x_t(t) = x_f(t) = x(t)$ à tout instant, tant que $|T| < \mu Mg$. En sommant les équations (1) et (3) pour éliminer T on obtient $(M + m)\ddot{x} = F$ et avec l'équation (1), on obtient $T = \frac{M}{M+m}F > 0$

Pour que le téléphone glisse sur la feuille, il faut $F > \mu(M + m)g$ (CG)

Avec les valeurs numériques choisies, on a une force minimale comprise entre 0,2 N et 0,4 N selon la valeur de μ , soit une force de l'ordre de grandeur du poids de l'ensemble téléphone, feuille, pondéré du coefficient μ . Si cette condition est facilement remplie pour le téléphone sur la feuille, elle devient plus délicate dans le cas de nombreux couverts et assiettes sur une nappe...

PFD au système feuille

La feuille est soumise à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ à la réaction du téléphone sur la feuille $\vec{R}_{t \rightarrow f} = -N\vec{u}_z - T\vec{u}_x$ (troisième loi de Newton), à la force de l'opérateur $\vec{F} = F\vec{u}_x$ et la réaction de la table $\vec{R}_t = N_t\vec{u}_z$ (On suppose qu'il n'y a pas de frottement de glissement entre la table et la feuille). La projection du PFD appliqué à la feuille selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ donne :

$$m\ddot{x}_f = F - T \quad (3)$$

$$0 = N_t - N - mg \quad (4)$$

Condition sur le retrait de la feuille

Même si le téléphone glisse sur la feuille, il va se déplacer vraisemblablement, comme la feuille, dans le sens de $\vec{F}$. Il faut donc aussi que le contact feuille/téléphone cesse avant que le téléphone n'atteigne le bord de la table.

On fait l'hypothèse qu'à partir de l'instant $t = 0$, il y a glissement du téléphone sur la feuille. On a donc $|T| = \mu N = \mu Mg$ à tout instant. On suppose également que $0 < \dot{x}_t < \dot{x}_f$ c'est-à-dire que la vitesse du téléphone par rapport à la feuille est selon $\vec{u}_{\vec{x}}$, ce qui conduit à écrire $T > 0$. En reprenant les équations (1) et (3), on a $\ddot{x}_t = \mu g$ et $\ddot{x}_f = \frac{F - \mu Mg}{m}$ soit par intégrations successives $x_t(t) = \frac{1}{2}\mu g t^2$ et $x_f(t) = \frac{F - \mu Mg}{2m} t^2$.

On introduit la distance $\delta(t) = x_f(t) - x_t(t) = \frac{1}{2m}(F - \mu(M + m)g)t^2$. La feuille sera retirée de sous le téléphone à partir de l'instant t_0 où $\delta(t_0) = R + r$ (figure (b)). On obtient alors $t_0 = \sqrt{\frac{2m(R+r)}{F - \mu(M+m)g}}$. Pendant cette phase d'entraînement, il ne faut pas que le centre d'inertie du téléphone quitte la table. Il faut donc que $x_t(t_0) < D$ soit $\frac{1}{2}\mu g t_0^2 < D$. En utilisant l'expression de t_0 trouvée précédemment, on obtient que la force F doit être telle que : $F > \frac{\mu m g (R+r) + \mu (M+m) g D}{D}$. Pour simplifier cette expression littérale sans changer radicalement la généralité du problème, on peut étudier le cas où $D = R$, ce qui conduit à : $F > \mu(M + m(2 + \frac{r}{R}))g$.

Même si l'expression de cette force limite est plus complexe que celle obtenue par la relation (CG) de l'approche préliminaire, il n'y a en pratique que peu de changement car $m \ll M$, ce qui atténue considérablement l'effet du terme correctif $(2 + \frac{r}{R})$. L'application numérique donne pour $\mu = 0,2$, $R = D = 20 \text{ cm}$ et $r = 5 \text{ cm}$ donne $F_{lim} = 0,23 \text{ N}$ au lieu des $0,21 \text{ N}$ de la condition (CG).

Condition sur l'arrêt du téléphone avant le bord de la table :

Même si la feuille a été retirée de sous le téléphone avant qu'il n'atteigne le bord de la table, ce dernier aura une vitesse $\dot{x}_t(t_0) = \mu g \sqrt{\frac{2m(R+r)}{F - \mu(M+m)g}}$ non nulle à l'abscisse $x_t(t_0) = \frac{\mu m g (R+r)}{F - \mu(M+m)g}$. S'il n'y a pas de frottement de la table sur le téléphone, ce dernier va atteindre le bord de la table à vitesse constante. Il faut donc prendre en compte le coefficient de frottement table/téléphone, noté μ_0 .

Après un nouveau bilan des forces sur le téléphone, la méthode la plus efficace consiste à utiliser le théorème de l'énergie cinétique. Avant que le téléphone n'atteigne le bord de la table, il faut que le travail résistant de la force de frottement sur la distance $R - x_t(t_0)$ dissipe l'énergie cinétique $\frac{1}{2}M\dot{x}_t^2(t_0)$ acquise dans le référentiel lié à la table, soit : $\frac{1}{2}M\dot{x}_t^2(t_0) < \mu_0 M g (R - x_t(t_0))$. Quelques lignes de calculs conduisent à une nouvelle expression de la valeur minimale de la force à appliquer :

$$F > \mu g \left[M + m \left(\frac{1 + \mu + \mu_0}{\mu_0} + \frac{(1 + \mu)r}{\mu_0 R} \right) \right]$$

On retrouve logiquement que pour un μ_0 très faible, il faut une force très grande pour éviter de faire chuter le téléphone. Numériquement, en prenant $\mu_0 = \mu = 0,2$, on obtient une force $F_{lim} = 0,29 \text{ N}$, du même ordre de grandeur que les conditions précédentes ($0,23 \text{ N}$ et $0,21 \text{ N}$).

Regard critique sur les résultats obtenus

On constate clairement qu'il faut avoir un coefficient de frottement μ le plus faible possible pour ne nécessiter qu'une faible force F . Ceci dit, dans le cas où il n'y a qu'une assiette, la force à exercer est de toute façon très raisonnable. Au passage, dans le cas asymptotique $\mu = 0$, on retrouve évidemment qu'il y a toujours glissement entre le téléphone et la feuille et qu'une force F minime suffit à réaliser l'expérience. D'ailleurs, la résolution conduirait à $x_t(t) = 0$: le téléphone ne bouge pas !

En revanche une fois la feuille retirée de sous le téléphone, il faut ralentir efficacement la vitesse acquise par le téléphone dans R . Il faut donc des frottements « importants » entre le téléphone et la table. Sans ces derniers, même avec une vitesse $\dot{x}_t(t_0)$ minime, le téléphone glisserait inévitablement jusqu'au bord de la table. . .

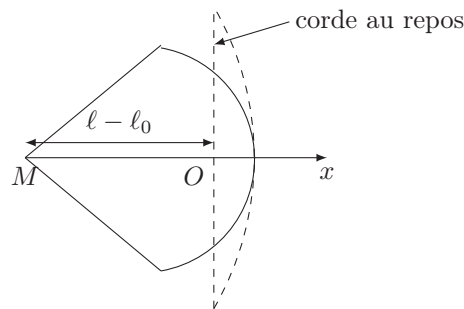
Sur le même sujet, vous pouvez visionner la vidéo suivante : <https://www.dailymotion.com/video/xz23jc>.

Exercice 2 Enroulement d'un fil sur un cylindre

- La longueur du fil non enroulé est la différence entre la longueur initiale et la longueur enroulé : $l(t) = l_0 - R\alpha(t)$.
- $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = R\vec{u}_r + l(t)\vec{u}_\theta$
- $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dl(t)}{dt}\vec{u}_\theta + l(t)\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$. Sachant que $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$ l'expression devient :
 $\vec{v} = -l(t)\dot{\theta}\vec{u}_r + (R\dot{\theta} + \frac{dl(t)}{dt})\vec{u}_\theta$
- On considère le point matériel M de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le point matériel est soumis au poids $\vec{P}$, à l'action du support $\vec{R}$ et à la tension du fil $\vec{T}$. En l'absence de frottement, la projection de la deuxième loi de Newton suivant $\vec{u}_z$ donne : $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M conduit à : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{T} = -T\vec{u}_\theta$. Nous constatons qu'il n'y a aucune force qui s'exerce suivant $\vec{u}_r$ alors que dans les coordonnées de Frenet, cette direction correspond à la direction tangentielle à la vitesse. L'accélération dans les coordonnées de Frenet s'écrit : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\vec{u}_n$ avec v la norme de la vitesse, $\vec{u}_t = -\vec{u}_r$ et $\vec{u}_n = \vec{u}_\theta$. On en déduit alors $\frac{dv}{dt} = 0$ soit une norme du vecteur vitesse constante égale à v_0 .
- D'après les deux questions précédentes on a $v_r = -l(t)\dot{\theta} = cste = -v_0$, soit $v_0 = l(t)\dot{\theta} = l(t)\dot{\alpha}$. D'après la première question on a $l(t) = l_0 - R\alpha(t)$ soit en dérivant cette équation $\frac{dl(t)}{dt} = -R\dot{\alpha}$. Nous obtenons alors $\frac{dl(t)}{dt} = -R\frac{v_0}{l(t)}$, ou encore $l(t)dl(t) = -Rv_0dt = d(\frac{l^2(t)}{2})$. Cette équation s'intègre en tenant compte des conditions initiales, soit $\frac{l^2(t)}{2} - \frac{l_0^2}{2} = -Rv_0t$. On obtient alors $l(t) = \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0t}$.
- D'après la première question on déduit $\alpha(t) = \frac{l_0 - \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0t}}{R}$
- Le fil est entièrement enroulé quand $l(t) = 0$, soit $t_f = \frac{l_0^2}{2Rv_0} = 10,7 \text{ s}$ et
 $\alpha(t_f) = \frac{l_0}{R} = 2,66 \text{ rad} = 153^\circ$
- D'après la question 4) on a $ma_\theta = -T$ avec $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-v_0\vec{u}_r) = -v_0\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\dot{\theta} = \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{v_0}{l_0\sqrt{1 - \frac{2Rv_0t}{l_0^2}}}$.
On en déduit $T = \frac{mv_0^2/l_0}{\sqrt{1 - \frac{t}{t_f}}}$, soit $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{t}{t_f}}}$ avec $T_0 = \frac{mv_0^2}{l_0} = 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ N}$. T_0 est la tension du fil quand $t = 0$. Lorsque $t \rightarrow t_f$, $T \rightarrow \infty$. Concrètement le fil doit se casser lorsque le point M touche le cylindre.

Exercice 3 Tir à l'arc

- La force de rappel du ressort s'écrit $\vec{T} = k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$ or $x = \ell - \ell_0$, ainsi $\vec{T} = -kx\vec{u}_x$



Le travail élémentaire s'écrit

$$\delta W(\vec{T}) = -kx\vec{u}_x \cdot d\vec{x} = -kxdx$$

Et $\vec{T}$ est conservative donc $\delta W(\vec{T}) = -dE_{pe}$

Ainsi

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + cste$$

On choisit la constante d'intégration telle que $E_{pe}(x = 0) = 0$, d'où $cste = 0$ et

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

- Système : flèche assimilée à un point matériel de masse m
— Référentiel : terrestre supposé galiléen auquel on associe le repère $(O, \vec{u}_x)$.

– Bilan des forces :

- le poids $\vec{P}$ (force conservative mais qui ne travaille pas ici car $\alpha = 0$),
- la force de rappel $\vec{T}$ (force conservative),
- la force exercée par l'archer $\vec{F}_a$ (force non conservative).

2.a. Application de la loi de l'énergie mécanique entre les points O ($x_O = 0$) et M_0 ($x_{M_0} = x_0 < 0$) :

$$\Delta E_m = W_{O \rightarrow M_0}(\vec{F}_a)$$

En notant E_{pp} l'énergie potentielle de pesanteur et E_{pe} l'énergie potentielle élastique,

$$E_c(M_0) + E_{pe}(M_0) + E_{pp}(M_0) - (E_c(O) + E_{pe}(O) + E_{pp}(O)) = W_{O \rightarrow M_0}(\vec{F}_a)$$

or $E_c(M_0) = E_c(O) = 0$, $E_{pp}(M_0) = E_{pp}(O)$ car $\alpha = 0$ (le poids ne travaille pas) et $E_{pe}(O) = 0$ donc :

$$W_{O \rightarrow M_0}(\vec{F}_a) = \frac{1}{2} k x_0^2$$

2.b. Application de la loi de l'énergie cinétique entre M_0 et O . L'archer n'intervient plus, seuls le poids et la force de rappel s'exercent alors.

$$\Delta E_c = W_{M_0 \rightarrow O}(\vec{P}) + W_{M_0 \rightarrow O}(\vec{T}) = W_{M_0 \rightarrow O}(\vec{T})$$

car $W_{M_0 \rightarrow O}(\vec{P}) = 0$ (le poids ne travaille pas). On en déduit

$$\frac{1}{2} m v^2(O) - \frac{1}{2} m v^2(M_0) = E_{pe}(M_0) - E_{pe}(O) = \frac{1}{2} k x_0^2$$

La flèche étant lâchée sans vitesse initiale depuis M_0 , il vient

$$v(O) = v_0 = \sqrt{\frac{k x_0^2}{m}}$$

2.c. i. Si k est trop élevé, l'archer ne pourra pas armer l'arc de manière significative.

Si k est trop faible, l'archer pourra armer l'arc facilement mais l'énergie potentielle en M_0 (qui correspond au travail fourni par l'archer et convertie en énergie cinétique en O) sera faible.

Pour une constante optimale k_0 et une flèche reculée de la distance maximale ℓ_m , la relation précédente s'écrit :

$$v_{0max} = \sqrt{\frac{k_0 \ell_m^2}{m}}$$

ii. Lorsque l'archer maintient la flèche immobile au point M_0 , les forces horizontales se compensent $\vec{F}_a = -\vec{T}$, ce qui donne, en projection selon $\vec{u}_x$: $F_a = k x_0$ et donc

$$F_m = k_0 \ell_m$$

ainsi :

$$v_{0max} = \sqrt{\frac{F_m \ell_m}{m}}$$

iii. Applications numériques :

$$- k_0 = \frac{F_m}{\ell_m} = 0,29 \text{ kN m}^{-1},$$

$$- v_{0max} = \sqrt{\frac{F_m \ell_m}{m}} = 68 \text{ m s}^{-1}$$

3. 3.a. Il faut ajouter le travail du poids qui était nul tant que $\alpha = 0$.

3.b. On reprend la loi de l'énergie mécanique établie précédemment entre O et M_0 et on obtient :

$$W_{O \rightarrow M_0}(\vec{F}_a) = \frac{1}{2} k x_0^2 + E_{pp}(M_0) - E_{pp}(O)$$

$$W_{O \rightarrow M_0}(\vec{F}_a) = \frac{1}{2} k x_0^2 - W_{O \rightarrow M_0}(\vec{P})$$

$$W_{O \rightarrow M_0}(\vec{F}_a) < \frac{1}{2} k x_0^2$$

car le poids est une force motrice de O à M_0 : son travail est positif et $E_{pp}(M_0) < E_{pp}(O)$.

On reprend maintenant la loi de l'énergie cinétique entre M_0 et O :

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + W_{M_0 \rightarrow O}(\vec{P}) < \frac{1}{2}kx_0^2}$$

car le poids est une force résistante de M_0 à O : son travail est négatif.

Conclusion : le travail fourni par l'archer et la vitesse au point O sont effectivement plus faibles.

- 3.c. Une fois la flèche lâchée, la seule force s'exerçant est le poids $\vec{P}$. Le système est conservatif, l'énergie mécanique est constante. Notons S le point culminant de la trajectoire du barycentre G de la flèche :

$$E_m(S) = E_m(O)$$

Lors de ce mouvement, la vitesse horizontale est constante et égale à $v_0 \cos(\alpha)$.

Ainsi, au point S , la vitesse verticale est nulle et $\vec{v}(S) = v_0 \cos(\alpha) \vec{u}_x$. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_0 \cos(\alpha))^2 + mgz(S)$$

d'où :

$$\boxed{z(S) = \frac{v_0^2(1 - \cos^2(\alpha))}{2g}}$$

On en déduit alors h_{max} pour $v_0 = v_{0max}$ et $\alpha = 45^\circ$.

Application numérique : $h_{max} = 0,12 \text{ km}$.

Commentaire : Altitude surestimée car les frottements ont été négligés.

Exercice 4 Le piège de Paul

A Préliminaires

A.1 On peut citer :

- la force de rappel d'un ressort $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$, $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$;
- la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}$, $E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$;
- la force d'interaction électrostatique $\vec{F} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}$, $E_p = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$...

A.2 Une masse reliée à un support fixe par un ressort et astreinte à se déplacer le long d'une tige (en négligeant bien sûr toute forme de frottements).

B Étude d'un mouvement unidimensionnel

B.1 On a $\vec{F} = -2Kxe_x$. Le PFD en projection sur e_x donne $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2K}{m}x = 0$.

B.2 On vérifie que $\frac{dE_p}{dx}(x=0) = 0$ et $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x=0) = 2K > 0$, ce qui caractérise un équilibre stable.

B.3 Si $K < 0$, $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x=0) = 2K < 0$: l'équilibre est instable.

B.4 Si $K > 0$, M a un mouvement d'oscillations autour de O et reste donc au voisinage de O ; à l'inverse, si $K < 0$, la moindre perturbation éloigne M de la position $x = 0$.

C Étude du régime statique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel

C.1 On a $\vec{F} = -(2\Phi_0axe_x + 2\Phi_0aye_y + 2\Phi_0bze_z)$ donc $\boxed{K_x = K_y = 2\Phi_0a \text{ et } K_z = 2\Phi_0b}$.

C.2 Le PFD donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2\Phi_0a}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2\Phi_0a}{m}y = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2\Phi_0b}{m}z = 0$$

C.3 On a $[\Phi_0] = MT^{-2}$ et $[\frac{\Phi_0a}{m}] = T^{-2}$ donc $[a] = \frac{[m]T^{-2}}{[\Phi_0]} = 1$. $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont donc sans dimension.}}$

C.4 Supposons $a > 0$. Alors nécessairement $b < 0$. Les équations en x et y sont celles d'oscillateurs harmoniques et correspondent à une particule piégée dans ces deux dimensions. Selon z , comme $b < 0$, $z = 0$ est une position d'équilibre instable et la particule quitte donc le voisinage de l'origine. Même raisonnement si $b > 0$ et $a < 0$.

Il est donc impossible de piéger une particule chargée à l'aide d'un potentiel statique.

D Étude du régime dynamique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel : piégeage

D.1 Le PFD donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0^4}{8\Omega^2}x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0^4}{8\Omega^2}y = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0^4}{2\Omega^2}z = 0$$

D.2 Sur chacun des axes, l'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique : $(x = 0, y = 0, z = 0)$

est une position d'équilibre stable. La particule est piégée. Par identification, $\omega_x = \omega_y = \frac{\omega_0^2}{2\sqrt{2}\Omega}$ et $\omega_z = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}\Omega}$.

D.3 Les solutions des équations différentielles sont

$$x(t) = A_x \cos \omega_x t + B_x \sin \omega_x t$$

$$y(t) = A_y \cos \omega_y t + B_y \sin \omega_y t$$

$$z(t) = A_z \cos \omega_z t + B_z \sin \omega_z t$$

A $t = 0$, $x(t = 0) = 0$, $y(t = 0) = 0$, $z(t = 0) = 0$ donc $A_x = A_y = A_z = 0$.

Pour la vitesse, on a $B_x \omega_x = v_0$, $B_y \omega_y = v_0$ et $B_z \omega_z = v_0$.

Finalement,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_x} \sin \omega_x t = \frac{2\sqrt{2}v_0\Omega}{\omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0^2}{2\sqrt{2}\Omega}t\right)$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega_z} \sin \omega_z t = \frac{\sqrt{2}v_0\Omega}{\omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}\Omega}t\right)$$

D.4 L'amplitude de $z(t)$ est deux fois plus petite que celle de $x(t)$; d'autre part, $\omega_z = 2\omega_x$: la période du mouvement selon z est donc égale à la moitié de la période du mouvement selon x . On a donc

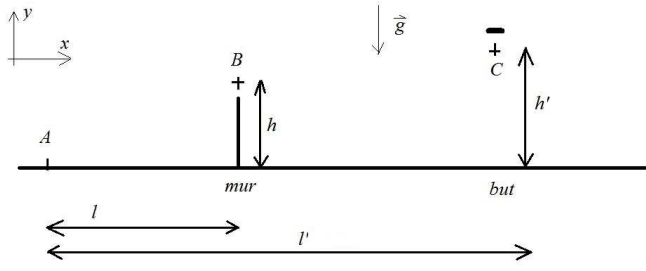
$$— A_z = \frac{A_x}{2}$$

$$— T_z = \frac{T_x}{2}$$

On en déduit que $f(t)$ correspond à $x(t)$ et $g(t)$ à $z(t)$.

D.5 Partons du point O , on commence par décrire le lobe de droite dans le sens horaire. On remarque alors que lorsque l'on a décrit ce lobe, le mouvement sur le lobe droit est identique pour l'axe vertical. Ainsi, la description totale de la trajectoire correspond à deux périodes sur l'axe vertical, une pour l'axe horizontal. Comme $T_z = \frac{T_x}{2}$, on en déduit que l'axe vertical correspond à l'axe Oz et l'axe horizontal à l'axe Ox .

Exercice 5 Résolution de problème : le tir de Achraf Hakimi

Compétence	Exemples de résolution
S'approprier le problème	On assimile le ballon à un point matériel de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen, c'est à dire qu'on néglige tout effet de rotation du ballon. On suppose que la trajectoire est plane, et on choisit un repère (Ox, Oy, Oz) tel que l'axe (Ox) corresponde à l'abscisse du ballon et l'axe (Oy) l'altitude. Les paramètres du problème sont représentés sur la figure ci-dessous :  Le ballon est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$ et on néglige les frottements fluides. Le ballon est lancé avec une vitesse initiale ayant comme composante suivant l'axe (Ox) : v_{0x} et suivant l'axe (Oy) : v_{0y}. L'objectif est de déterminer une équation de trajectoire qui vérifie le schéma ci-dessus pour calculer la vitesse initiale du ballon $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$.
Établir une stratégie de résolution (analyser).	On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) au ballon dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On a alors $m\vec{a} = \vec{P}$. En projetant suivant (Ox), on a $m\ddot{x} = 0$ et suivant l'axe (Oy) $m\ddot{y} = -mg$. Par intégrations successives on obtient $v_x(t) = v_{0x}$ puis $x(t) = v_{0x}t$ et $v_y(t) = -gt + v_{0y}$ puis $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$ (On considère que le point A est confondu avec l'origine du repère.) En éliminant le temps dans ces équations, on obtient $y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{0x}^2} + x\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ Pour déterminer les composantes du vecteur $\vec{v}_0$, les points B et C doivent vérifier l'équation de la trajectoire, on aura alors un système de deux équations (y_B et y_C) à deux inconnues (v_{0x} et v_{0y}) à résoudre.
Mettre en œuvre la stratégie	Au point B l'équation obtenue est : $h v_{x0}^2 = -g\frac{l'^2}{2} + v_{y0}v_{x0}l'$ et au point C, on a $h' v_{x0}^2 = -g\frac{l'^2}{2} + v_{y0}v_{x0}l'$. La résolution de ce système d'équations donne : $v_{0x}^2 = \frac{g(-l'^2l' + l'^2l)}{2(hl' - h'l)}$ et $v_{0y} = \frac{h}{l}v_{0x} + \frac{gl}{2v_{0x}}$ L'application numérique donne $v_{0x} = 32 \text{ ms}^{-1}$ et $v_{0y} = 7,2 \text{ ms}^{-1}$ soit $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 33 \text{ m/s}$
Avoir un regard critique sur les résultats obtenus (valider)	On obtient une vitesse de l'ordre de 120 km/h, ce qui est rapide mais pas impossible pour un footballeur professionnel. En réalité, on doit prendre en compte de la rotation du ballon et les frottements de l'air mais l'ordre de grandeur obtenu à partir de ce modèle simplifié semble correct.
Communiquer	

```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
#variables globales utilisées
g=9.8# acceleration de la pesanteur en m/s²
l=10 # distance en m du mur
lp=30# distance en mètre du but
h=2# hauteur du mur en mètre
hp=2.44#hauteur du but
m=0.43#masse du ballon en kg
d=0.22#diametre du ballon en m
rho=1.3#masse volumique de l'air en kg/m³
S=np.pi*d**2/4# surface apparente du ballon en m²
C=0.5# coefficient de trainée moyen (hypothèse d'un écoulement non turbulent, ce qui est très discutable !)
beta=1/2*C*S*rho# coefficient de frottement quadratique
```

Hypothèses

- On suppose que la trajectoire est plane dans le plan (x,y)
- On néglige la rotation du ballon et son extension spatiale (pas de barre transversale ou de déviation du ballon)
- Dans le cas de la prise en compte des frottements on considère une force

$$\vec{f} = -\frac{1}{2} C S \rho v \vec{v}$$

avec ρ la masse volumique de l'air S la surface apparente du ballon et C le coefficient de trainée.

1) Modélisation sans frottement

```
In [2]: def equasansfrot(X,t):
        """X comprend les variables de positions x et y et les composantes du vecteurs vitesses vx et vy"""
        return np.array([X[2], X[3],0,-g])

In [3]: alpha1=17*np.pi/180# valeur de l'angle du tir
N=5# nombre de valeurs de vitesses
v0=np.linspace(25,35,N)# variation de la valeur de v0 pour alider une valeur

In [4]: X0=np.zeros((N,4))# génération du vecteur conditions initiales x(0)=0, y(0)=0, vx=v0cos(alpha),vy=v0sin(alpha)
X0[:,2]=v0*np.cos(alpha1)
X0[:,3]=v0*np.sin(alpha1)

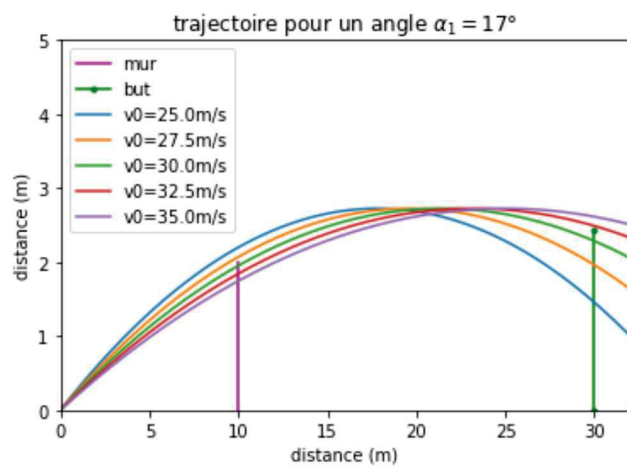
In [5]: X0

Out[5]: array([[ 0.          ,  0.          , 23.9076189 ,  7.30929262],
 [ 0.          ,  0.          , 26.29838079 ,  8.04022188],
 [ 0.          ,  0.          , 28.68914268 ,  8.77115114],
 [ 0.          ,  0.          , 31.07990457 ,  9.5020804 ],
 [ 0.          ,  0.          , 33.47066646 , 10.23300967]])

In [6]: Np=200
tf=1.5# temps final de la modélisation en seconde
t=np.linspace(0,tf,Np)

In [7]: sol={}#dictionnaire vide des solutions
for i in range(N):
    sol[i]=odeint(equasansfrot,X0[i],t)

In [8]: plt.figure()
plt.plot([l,l],[0,h],'-m',label='mur')
plt.plot([lp,lp],[0,hp],'-g',label='but')
for i in range(N):
    plt.plot(sol[i][:,0],sol[0][:,1],label='v0='+str(v0[i])+'m/s')
#plt.axis('equal')
plt.xlabel('distance (m)')
plt.ylabel('distance (m)')
plt.title(r'trajectoire pour un angle $\alpha_1=17^\circ$')
plt.ylim([0,5])
plt.xlim([0,32])
plt.legend(loc=2)
plt.show()
```

Plus v_0 est petit, moins il n'y a de risque que le ballon ne soit pas cadré, mais plus il sera facile de l'arrêter. La trajectoire qui passe par les deux points mentionnés dans l'approche analytique correspondra au tir le plus difficile à arrêter.

2) Modélisation avec frottement

```
In [9]: def equaavecrot(X,t):
        """X comprend les variables de positions x et y et les composantes du vecteurs vitesses vx et vy"""
        return np.array([X[2], X[3], -beta/m*X[2]*(X[2]**2+X[3]**2)**0.5, -g-beta/m*X[3]*(X[2]**2+X[3]**2)**0.5])

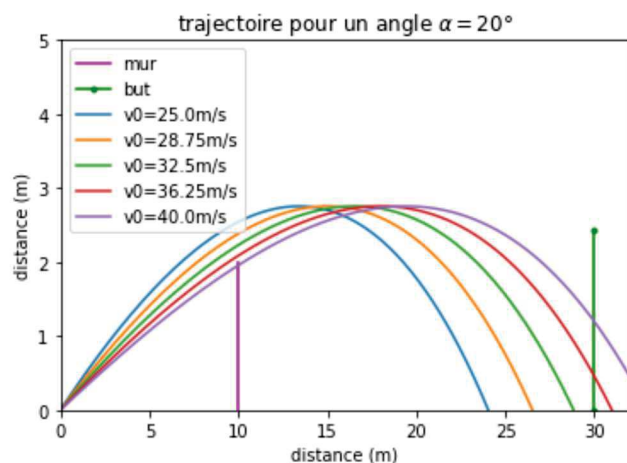
In [10]: alpha2=20*np.pi/180# valeur de l'angle du tir
N=5# nombre de valeurs de vitesses
v02=np.linspace(25,40,N)# variation de la valeur de v0 pour alider une valeur

In [11]: X02=np.zeros((N,4))# génération du vecteur conditions initiales x(0)=0, y(0)=0, vx=v0cos(alpha),vy=v0sin(alpha)
X02[:,2]=v02*np.cos(alpha2)
X02[:,3]=v02*np.sin(alpha2)

In [12]: Np=200
tf=1.5# temps final de la modélisation en seconde
t=np.linspace(0,tf,Np)

In [13]: sol2={}#dictionnaire vide des solutions
for i in range(N):
    sol2[i]=odeint(equaavecrot,X02[i],t)

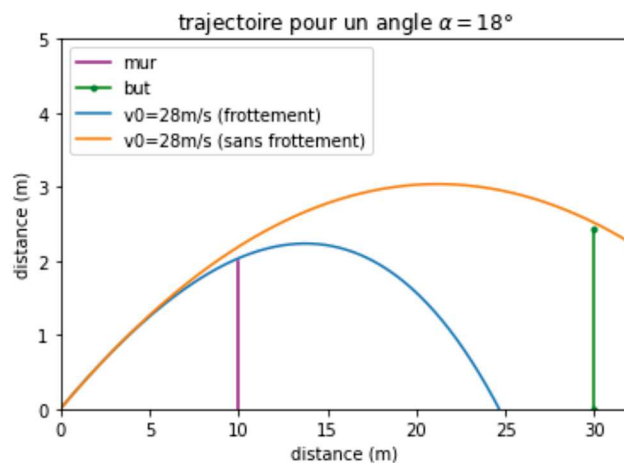
In [14]: plt.figure()
plt.plot([1,1],[0,h],'-m',label='mur')
plt.plot([lp,lp],[0,hp],'-g',label='but')
for i in range(N):
    plt.plot(sol2[i][:,0],sol2[i][:,1],label='v0='+str(v02[i])+ 'm/s')
#plt.axis('equal')
plt.xlabel('distance (m)')
plt.ylabel('distance (m)')
plt.title(r'trajectoire pour un angle $\alpha=20^\circ$')
plt.ylim([0,5])
plt.xlim([0,32])
plt.legend(loc=2)
plt.show()
```



Comparaison avec et sans frottement

```
In [15]: v0c=28
alphac=16*np.pi/180
X0c=[0,0,v0c*np.cos(alphac),v0c*np.sin(alphac)]
solsf=odeint(equasansfrot,X0c,t)
solaf=odeint(equaavecfrt,X0c,t)
```

```
In [16]: plt.figure()
plt.plot([1,1],[0,h],'-m',label='mur')
plt.plot([lp,lp],[0,hp],'-g',label='but')
plt.plot(solaf[:,0],solaf[:,1],label='v0='+str(v0c)+'m/s (frottement)')
plt.plot(solsf[:,0],solsf[:,1],label='v0='+str(v0c)+'m/s (sans frottement)')
plt.xlabel('distance (m)')
plt.ylabel('distance (m)')
plt.title(r'trajectoire pour un angle  $\alpha=18^\circ$ ')
plt.ylim([0,5])
plt.xlim([0,32])
plt.legend(loc=2)
plt.show()
```



Bilan

Les frottements semblent avoir de l'influence sur ce coup franc et donc sur la détermination de la vitesse initiale mais pour considérer le problème initial il faut revenir sur deux hypothèses clés :

- Le coefficient de traînée C évolue avec le temps en fonction de l'écoulement autour du ballon et ne peut être considéré constant (il peut arriver que ce coefficient devienne négatif et le ballon est ainsi accéléré)
- La trajectoire n'est pas plane si on prend en compte la rotation du ballon et les forces de frottements de l'air agissent sur la rotation du ballon. Une première approche serait de considérer l'effet Magnus.