Samedi 14 janvier 2023

Correction du devoir surveillé n° 4

Problème 1 Thierry la Fronde

A Mouvement circulaire

A.1 La pierre assimilée à un point matériel M est soumis à son poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_y$ et à la tension du fil $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u}_r$.

A.2 La loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ galiléen s'écrit :

$$m\overrightarrow{a} = -mg\overrightarrow{u}_y - T\overrightarrow{u}_r \Longleftrightarrow m(-R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta) = mg\cos(\theta)\overrightarrow{u}_r - mg\sin(\theta)\overrightarrow{u}_\theta - T\overrightarrow{u}_r$$

En projection selon $\overrightarrow{u}_\theta$: $R\ddot{\theta} = -g\sin(\theta)$, ce qui est l'équation du mouvement.

En projection sur $\overrightarrow{u}_r$: $T = m(R\dot{\theta}^2 + g\cos(\theta))$.

A.3 On multiplie l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$:

$$R\ddot{\theta}\dot{\theta} = -g\sin(\theta)\dot{\theta} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(R\dot{\theta}^2)}{\mathrm{d}t} = g\frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}(R\dot{\theta}^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(2g\cos(\theta)\right)}{\mathrm{d}t}$$

On intègre ce résultat entre $t = 0$, date à laquelle $\theta(0) = 0$ et $R\dot{\theta}(0) = v_0$, et t :

$$R\dot{\theta}^2(t) - \frac{v_0^2}{R} = 2g(\cos(\theta(t)) - 1) \Longleftrightarrow \dot{\theta}^2(t) = \frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos(\theta(t)) - 1)$$

A.4 En reportant l'expression précédente de $\dot{\theta}^2$ dans celle T, il vient : $T(\theta) = mg\left(3\cos(\theta) - 2 + \dfrac{v_0^2}{Rg}\right)$.

La valeur minimale de T est obtenue pour $\theta = \pi$ et $T_{\min} = mg\left(-5 + \dfrac{v_0^2}{Rg}\right)$. Pour que la pierre puisse faire un tour complet, il faut donc que $v_0 > \sqrt{5Rg} = 4{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

B Lancement du projectile

B.1 On travaille dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, considéré galiléen . La pierre M n'est soumise qu'à son poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_y$, puisqu'on néglige les frottements. Son accélération dans $\mathcal{R}$ est $\overrightarrow{a} = \ddot{x}_M(t)\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}_M(t)\overrightarrow{u}_y$. La loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans $\mathcal{R}$ conduit à $m\overrightarrow{a} = -mg\overrightarrow{u}_y$. Par projection sur les deux axes, on obtient $\ddot{x}_M(t) = 0$ et $\ddot{y}_M(t) = -g$.

Compte tenu des conditions initiales, une première intégration conduit à : $\dot{x}_M(t) = \dot{x}_0(0) = v_0\cos(\alpha)$ et $\dot{y}_M(t) = -gt + \dot{y}_M(0) = -gt + v_0\sin(\alpha)$. Puis une seconde intégration à : $x_M(t) = v_0\cos(\alpha)t$ et $y_M(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t + y_0$. D'où on déduit : $t = \dfrac{x_M}{v_0\cos(\alpha)}$ et l'équation de la trajectoire :

$$y_M(x_M) = -\frac{g}{2v_0^2}\frac{1}{\cos^2(\alpha)}x_M^2 + \tan(\alpha)x_M + y_0$$

On reconnaît l'équation d'une parabole.

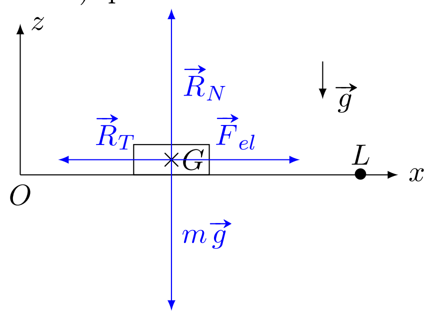
B.2 On doit résoudre l'équation $y(x_m) = 0$, soit $x_m^2 - \dfrac{2v_0^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}x_m - \dfrac{2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}y_0 = 0$ dont x_m est la racine positive. On obtient : $x_m = \dfrac{v_0^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\left(\dfrac{v_0^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}\right)^2 + \dfrac{2v_0^2\cos^2(\alpha)y_0}{g}} = 40\,\mathrm{m}$.

Problème 2 Le cadeau du père Noël...

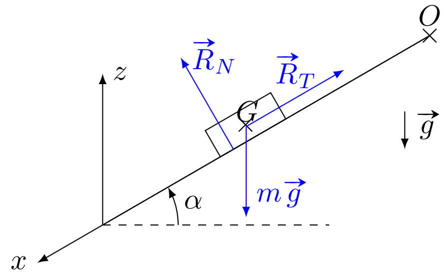
A Présentation de la démarche

On souhaite déterminer l'énergie élastique pouvant être stockée dans le camion, on pourra donc s'appuyer sur une démarche énergétique :

- Dans la première expérience, l'énergie initiale élastique du camion (ce qu'on cherche à déterminer) à été dissipée par des forces de frottements qui peuvent être des frottements solides (contact avec le sol via les 6 roues du camion) et des frottements fluides (force exercée par l'air sur le camion). L'objectif serait d'évaluer le travail de ces forces de frottements pour revenir à l'énergie élastique initiale du camion.
- Dans la deuxième expérience, le camion est mis en mouvement grâce à son énergie potentielle. L'étude menée peut nous permettre de déterminer le travail des forces non conservatives qui s'exerce sur le camion puis de remonter aux forces non conservatives (forces de frottement solide et fluide) qui s'exercent sur le camion pour retrouver l'énergie élastique initiale de l'expérience 1.



Expérience 1



Expérience 2

B Hypothèses

- Le camion est assimilé à un point matériel G de masse m qui glisse avec frottement sur un support (on néglige les mouvements de rotations des roues...).
- On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
- Les forces qui s'exercent sur le camion sont le poids $\vec{P} = -mg\vec{u}z$ où l'axe (Oz) est un axe ascendant (force conservative), la réaction tangentielle non conservative qui s'oppose au mouvement, la réaction normale du support qui ne travaille pas, la force de frottement de l'air non conservative et une force motrice élastique conservative.
- On suppose que les surfaces de l'expérience 1 et de l'expérience 2 sont similaires et que les forces de frottement solide du camion sont identiques sur les deux surfaces (hypothèse évoquée dans le texte).
- On néglige les frottements de l'air devant les frottements solides (6 roues en contacts avec le sol, faible surface et faible vitesse) et on suppose que la force de frottement solide à une norme constante R_T.

C Exploitation de l'expérience 1

On applique le théorème de l'énergie mécanique au camion dans le référentiel terrestre supposé galiléen entre l'instant initial I et l'instant final F : $\Delta_{I\to F}E_m = W_{I\to F}(\vec{R}_T)$ avec $E_m = E_c + E_{pe}$ puisque l'énergie potentielle de pesanteur n'intervient pas dans cette expérience. L'énergie cinétique initiale et finale sont nulles et l'énergie mécanique finale est également nulle si on considère que toute l'énergie élastique initiale a été consommée. Ainsi en appelant L la distance parcourue par le camion :

$$\Delta_{I\to F}E_m = -E_{peI} = W_{I\to F}(\vec{R}_T) = -R_T L \quad \text{soit} \quad E_{peI} = R_T L$$

D Exploitation de l'expérience 2

On applique le théorème de l'énergie mécanique au camion dans le référentiel terrestre supposé galiléen entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant final $t_f = 1{,}2\,\mathrm{s}$ de cette expérience. L'énergie cinétique s'écrit $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = mgz == -mgx\sin\alpha$. On appelle $x_f = x(t_f)$ et $v_f = v(t_f)$ la vitesse à l'instant t_f qui pourra être déterminée en exploitant la courbe de la position en fonction du temps (pente à l'instant t_f).

$$\Delta E_m = W(\vec{R_T}) = -R_T x_f = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgx_f \sin\alpha$$

On en déduit $R_T = mg\sin\alpha - \frac{1}{2x_f}mv_f^2$.

L'exploitation de la courbe permet d'obtenir pour $t_f = 1{,}2\,\mathrm{s}$, $x(t_f) = x_f = 83\,\mathrm{cm}$ et on peut obtenir la vitesse en déterminant le coefficient directeur de la pente à la courbe à l'instant $t = t_f$. On obtient alors $v_f = v(t_f) = 1{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. On a ainsi $R_T = 23 \times 10^{-3}\,\mathrm{N}$

E Résultat obtenu, conclusion et validation

L'exploitation des deux expériences conduit à $E_{pe} = R_T L = 81 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$.

Validation du modèle :

- On une énergie de l'ordre de quelques dizaines de mJ, ce qui est plutôt faible mais compatible avec l'énergie stockée dans un jouet. C'est la même énergie qu'un moteur électrique de jouet alimenté par une pile AA de 1,5 V dépenserait en étant parcouru par 8 mA pendant 7 s ($W_m = Ei\Delta t$).
- L'hypothèse la plus forte est de négliger les forces qu'exercent l'air sur le camion (force proportionnelles à la vitesse. On pourrait refaire le raisonnement en les considérant quasiment voisines : en effet dans la seconde expérience la vitesse moyenne est plus importante mais l'expérience dure moins longtemps.
- On vérifie également qu'on ne peut pas négliger les frottements solides dans l'expérience 2 : la position atteinte en $t_f = 1{,}2\,\mathrm{s}$ avec une accélération constante $g\sin\alpha$ aurait été de $x_{sf}(t_f) = \frac{1}{2}g\sin\alpha t_f^2 = 1{,}4\,\mathrm{m} > x_f$. Ce sont d'ailleurs les frottements (adhérence) qui permettent au camion d'avancer.
- On constate que lors de l'expérience 1, le camion n'a pas libéré toute son énergie élastique, puisque lorsqu'on le soulève, les roues se mettent à tourner (la condition de glissement n'était plus vérifiée à la fin de l'expérience 1. On a donc sous évaluée l'énergie élastique maximale.

Problème 3 Étude du Large Hadron Collider du CERN

A Particule dans un champ électrique constant uniforme

A.1 $\vec{F} = e\vec{E}$ (avec $e > 0$ la charge élémentaire du proton).

A.2 $\frac{eE}{mg} \approx 1 \times 10^{12}$. Le poids peut donc être négligé !

A.3 On s'intéresse au proton de masse m_p dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à la force électrique. L'application de la deuxième loi de Newton donne $\vec{a} = \frac{e}{m}\vec{E}$.

A.4 Le champ électrique est orienté dans le ses des potentiels décroissants, donc pour avoir une force suivant $\vec{u}_x$, V_L doit être négatif. La relation champ potentiel s'écrit : $\vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = -\mathrm{d}V$. Le champ $\vec{E}$ étant uniforme en intégrant entre $x = 0$ et $x = L$, on obtient : $V_L = -EL$.

A.5 On applique le théorème de l'énergie cinétique au proton dans le référentiel terrestre supposé galiléen entre les abscisses $x = L$ et $x = 0$: $E_c(x = L) - E_c(x = 0) = e\vec{E} \cdot L\vec{u}_x$ puisque la force est constante. On a ainsi $E_c(x = L) = eEL = -eV_L$.

B Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

B.1 Entre deux tubes, la variation d'énergie cinétique vaut eU_c (même situation que dans la partie précédente).

B.2 $E_c = e(U_0 + (n-1)U_c)$. À la sortie du premier tube, la tension U_c n'est pas encore intervenue ! ce qui explique le terme $(n-1)$.

B.3 Sachant que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, on utilise l'expression de la question précédente et on obtient : $v = \sqrt{\dfrac{2e(U_0 + (n-1)U_c)}{m}} = 6{,}0 \times 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx \frac{c}{5}$.

B.4 En prenant le critère donné par l'énoncé ($v < c/3$), les protons sont non relativistes et la mécanique newtonienne s'applique.

C Du linac 2 au synchroton à protons (PS)

C.1 Le proton étudié dans le référentiel terrestre dans au champ magnétique $\vec{B}_0$ est soumis à la **force de Lorentz** magnétique : $\vec{f}_L = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ (cette force dépend du référentiel étudié).

C.2 Par définition du produit vectorielle la direction de $\vec{f}_L(t=0)$ est orthogonale à $\vec{B}_0$ et à $\vec{v}_0$. Le sens est donné par la règle du « tire-bouchon » de telle sorte que $\vec{v}_0$, $\vec{B}_0$ et $\vec{f}_L(t=0)$ forment un trièdre direct. La projection de $\vec{f}_L(t=0)$ suivant $\vec{u}_y$ est négative. $\|\vec{f}_L(t=0)\| = ev_0B$.

C.3 Le travail élémentaire de la force de Lorentz s'écrit $\delta W = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ avec $\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{v}\mathrm{d}t$. La force étant orthogonale à la vitesse, le travail élémentaire de la force de Lorentz est nulle. On applique alors le théorème de l'énergie cinétique au proton soumis uniquement à la force de Lorentz dans le référentiel terrestre supposé galiléen entre deux instants voisins. $\mathrm{d}E_c = \delta W(\vec{f}_L) = 0$. L'énergie cinétique est donc constante au cours du mouvement ce qui implique une norme de vitesse constante et un mouvement uniforme.

C.4 On applique la deuxième loi de Newton au proton soumis uniquement à la force de Lorentz dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La projection suivant les différents axes donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{eB_0}{m_p}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{eB_0}{m_p}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = 0 \end{cases}$$

La projection suivant $\vec{u}_z$ donne $v_z = cste = v_{0z} = 0$ soit $z(t) = 0$ (mouvement plan). On peut découpler le système d'équation à partir de la variable complexe $u = x + jy$. On obtient alors $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -j\omega_c\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ avec $\omega_c = \frac{eB_0}{m_p}$. On a ainsi soit $\dot{u} = Ke^{-j\omega_0 t}$ Sachant que $\dot{u}(0) = v_{0x} + jv_{0y} = v_0\cos\alpha_0 + jv_0\sin\alpha$, on obtient $\dot{u} = (v_0\cos\alpha + jv_0\sin\alpha)e^{-j\omega_0 t}$. Par une nouvelle intégration on obtient $u(t) = \frac{j(v_0\cos\alpha + jv_0\sin\alpha)}{\omega_c}(e^{-j\omega_c t} - 1)$. En prenant la partie réelle de u et la partie imaginaire, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{v_0}{\omega_c}\sin\alpha(\cos\omega_c t - 1) + \frac{v_0}{\omega_c}\cos\alpha\sin\omega_c t \\ y(t) = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega_c}\sin\omega_c t + \frac{v_0\cos\alpha}{\omega_c}(\cos\omega_c t - 1) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Les termes dépendant du temps dans les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement $\frac{v_0}{\omega_c}(-\sin\alpha\cos\omega_c t + \cos\alpha\sin\omega_c t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t - \alpha)$ et $\frac{v_0}{\omega_c}(\sin\alpha\sin\omega_c t + \cos\alpha\cos\omega_c t) = \frac{v_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t - \alpha)$. En mettant ces termes au carré et en les ajoutant on élimine la dépendance temporelle et on obtient l'équation de la trajectoire :

$$\left(x - \frac{v_0}{\omega_c}\sin\alpha\right)^2 + \left(y + \frac{v_0}{\omega_c}\cos\alpha\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$$

On obtient ainsi un cercle de centre $C(\frac{v_0}{\omega_c}\sin\alpha, -\frac{v_0}{\omega_c}\cos\alpha)$ et de rayon v_0/ω_c.

C.5 D'après la question précédente : $R = \frac{m_p v_0}{eB_0}$.

C.6 On néglige l'influence du poids sur un temps de vol forcément court pour un proton ; d'après la première loi de Newton, en l'absence de force, le mouvement du proton en dehors de la zone de champ magnétique sera rectiligne uniforme.