

Problème 1 : Stratégie de charge d'un condensateur

10) On note η le rendement de la charge du condensateur défini par :

$$\eta = \frac{E_{\text{stockée}}}{E_{\text{fournie}}}$$

Par analyse dimensionnelle :

$$[E_{\text{stockée}}] = \left[\frac{1}{2} C \cdot u_c^2(t) \right] = [C \cdot E^2]$$

$$[E_{\text{fournie}}] = [\mathcal{P}_{\text{fournie}} \cdot \tau] = [E \cdot i(t) \cdot \tau] = \left[\frac{E^2 \cdot \tau}{R} \right] = [C \cdot E^2]$$

On vérifie que η est sans dimension, et ne dépend pas de R , C et E .

III.1 Premier procédé de charge

11) L'interrupteur est dans la position (2). Le condensateur est en charge. En appliquant la loi des mailles, on établit que :

$$E = u_c(t) + R \cdot i_c(t) = u_c(t) + R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

Soit l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$:

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec $\tau = R \cdot C$

12) Il n'y a pas de discontinuité de la tension aux bornes du condensateur : $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$.

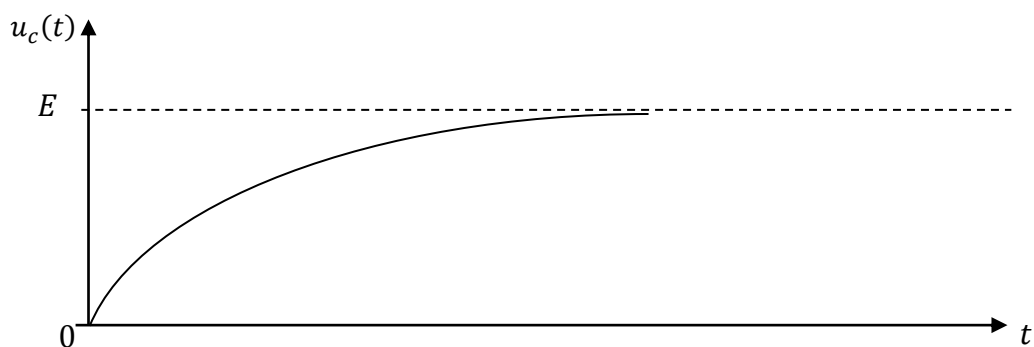
13) La solution de l'équation différentielle est du type :

$$u_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

Sachant que $u_c(0) = 0$ on en déduit que $A = -E$:

$$u_c(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

14) Allure de $u_c(t)$:



15) Energie stockée dans le condensateur : $E_{\text{stockée}} = \frac{1}{2} C \cdot u_c^2(t)$. A la fin de la charge $u_c(t) \rightarrow E$ donc :

$$E_{\text{stockée}} = \frac{1}{2} C \cdot E^2$$

16) Nous savons que $i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$ avec $u_c(t) = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$. En explicitant, on vérifie que :

$$i_c(t) = C \cdot E \cdot \left(\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \right) = \frac{E}{R} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

17) Par définition, l'énergie fournie par le générateur sur l'ensemble de la charge est donnée par :

$$E_{\text{fournie}} = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{\text{fournie}} \cdot dt$$

avec $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = E \cdot i_c(t)$, en explicitant :

$$E_{\text{fournie}} = \int_0^{\infty} E \cdot i_c(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot dt = \frac{E^2 \cdot \tau}{R} = C \cdot E^2$$

18) On constate que le rendement de la charge du condensateur est

$$\eta = \frac{E_{\text{stockée}}}{E_{\text{fournie}}} = \frac{\frac{1}{2} C \cdot E^2}{C \cdot E^2} = 50 \%$$

Ce résultat est indépendant de la valeur de la résistance R !!!

III.2 : Second procédé de charge

19) De la même manière que précédemment, en appliquant la loi des mailles, on établit :

$$\frac{E}{2} = u_c(t) + R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

Soit l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$:

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau} = \frac{E}{2 \cdot \tau}$$

Compte tenu des conditions initiales qui restent inchangées, on établit que :

$$u_c(t) = \frac{E}{2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

20) Posons $u_c(t_1) = (0,99) \cdot E/2$ en explicitant :

$$1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0,99$$

Ce qui nous conduit (avec 2 C.S) à l'égalité :

$$t_1 = \tau \cdot \ln(100) = 4,6 \cdot R \cdot C$$

21) Pendant la seconde phase de la charge du condensateur, l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ est identique à celle établie à la question 11). La solution de cette équation différentielle est donc identique :

$$u_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

Seule la condition initiale change :

$$u_c(t_1^+) = u_c(t_1^-) = \frac{E}{2}$$

On en déduit que :

$$\frac{E}{2} = A \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau}} + E$$

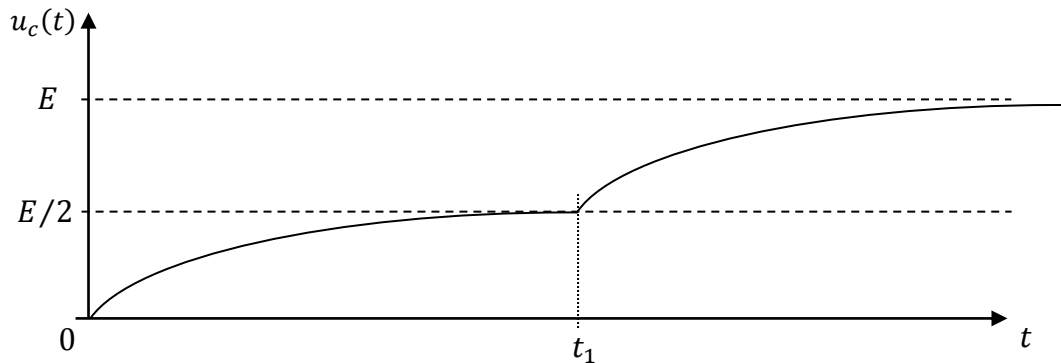
Soit :

$$A = -\frac{E}{2} e^{\frac{t_1}{\tau}}$$

Soit l'expression de $u_c(t)$:

$$u_c(t) = \frac{E}{2} \left(2 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right)$$

22) Allure de $u_c(t)$:



23) Etablissons l'expression de $i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$ pendant les deux phases de la charge du condensateur :

- Pour $0 \leq t \leq t_1$ avec $u_c(t) = \frac{E}{2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$:

$$i_c(t) = \frac{E}{2 \cdot R} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

- Pour $t_1 \leq t$ avec $u_c(t) = \frac{E}{2} \left(2 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right)$:

$$i_c(t) = \frac{E}{2 \cdot R} \left(e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right)$$

24) A partir de la formule rappelée à la question 17), on peut dire que l'énergie fournie par les deux générateurs est :

$$E_{\text{fournie}} = \int_0^{t_1} \left(\frac{E}{2} \right) \cdot \left(\frac{E}{2 \cdot R} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \cdot dt + \int_{t_1}^{\infty} E \cdot \left(\frac{E}{2 \cdot R} \left(e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right) \right) \cdot dt$$

En explicitant, on établit que :

$$E_{\text{fournie}} = \frac{C \cdot E^2}{4} + \frac{C \cdot E^2}{2} = \frac{3 \cdot C \cdot E^2}{4}$$

25) L'énergie stockée est la même que précédemment : $E_{\text{stockée}} = \frac{C \cdot E^2}{2}$; le rendement de la charge avec la double charge du condensateur est :

$$\eta = \frac{E_{\text{stockée}}}{E_{\text{fournie}}} = \frac{\frac{1}{2} C \cdot E^2}{\frac{3 \cdot C \cdot E^2}{4}} = \frac{2}{3} = 0,67 \%$$

On constate que le procédé qui consiste à imposer une double charge au condensateur possède un **meilleur rendement**.

III.3 : Généralisation à une charge en N étapes

26) Equation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ lors de la $k^{\text{ième}}$ charge du condensateur :

$$\frac{k \cdot E}{N} = u_c(t) + R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

La solution de cette équation différentielle est du type :

$$u_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{k \cdot E}{N}$$

Relation de continuité :

$$u_c(t_{k-1}^+) = u_c(t_{k-1}^-) = (k-1) \frac{E}{N}$$

On en déduit que :

$$A = -\frac{E}{N} e^{-\frac{t_{k-1}}{\tau}}$$

Soit la solution de l'équation différentielle :

$$u_c(t) = \frac{k \cdot E}{N} - \frac{E}{N} e^{-\frac{t-t_{k-1}}{\tau}}$$

27) Intensité circulant dans la branche du condensateur :

$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

Après calculs :

$$i_c(t) = \frac{E}{N \cdot R} e^{-\frac{t-t_{k-1}}{\tau}}$$

28) Energie fournie par le générateur à la $k^{\text{ième}}$ charge du condensateur :

$$E_{\text{fournie},k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{k \cdot E}{N} \right) \cdot \left(\frac{E}{N \cdot R} e^{-\frac{t-t_{k-1}}{\tau}} \right) \cdot dt = -\frac{k \cdot C \cdot E^2}{N^2} \left[e^{-\frac{t_k-t_{k-1}}{\tau}} - 1 \right]$$

$$E_{\text{fournie},k} = \frac{k \cdot C \cdot E^2}{N^2}$$

$$\text{avec } e^{-\frac{t_k-t_{k-1}}{\tau}} = e^{-5} = 0.$$

29) Energie fournie par le générateur lors de l'ensemble de la charge :

$$E_{\text{fournie}} = 1. \left(\frac{C.E^2}{N^2} \right) + 2. \left(\frac{C.E^2}{N^2} \right) + \dots k. \left(\frac{C.E^2}{N^2} \right) + \dots + N. \left(\frac{C.E^2}{N^2} \right)$$

$$E_{\text{fournie}} = \left(\frac{C.E^2}{N^2} \right) \cdot \sum_{k=1}^N k$$

En notant que :

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{N.(N+1)}{2}$$

On établit que :

$$E_{\text{fournie}} = \left(\frac{C.E^2}{2} \right) \cdot \frac{N+1}{N}$$

30) Le rendement de la charge en N étapes est :

$$\eta = \frac{E_{\text{stockée}}}{E_{\text{fournie}}} = \frac{\frac{1}{2} C.E^2}{\left(\frac{C.E^2}{2} \right) \cdot \frac{N+1}{N}}$$

$$\eta = \frac{N}{N+1}$$

On constate que pour N grand, le rendement de la charge tend vers 1. Il est donc possible d'augmenter le rendement de la charge du condensateur en soumettant le condensateur à **un grand nombre de charges...**

Problème n°2 : Modélisation du mouvement d'une plateforme en mer

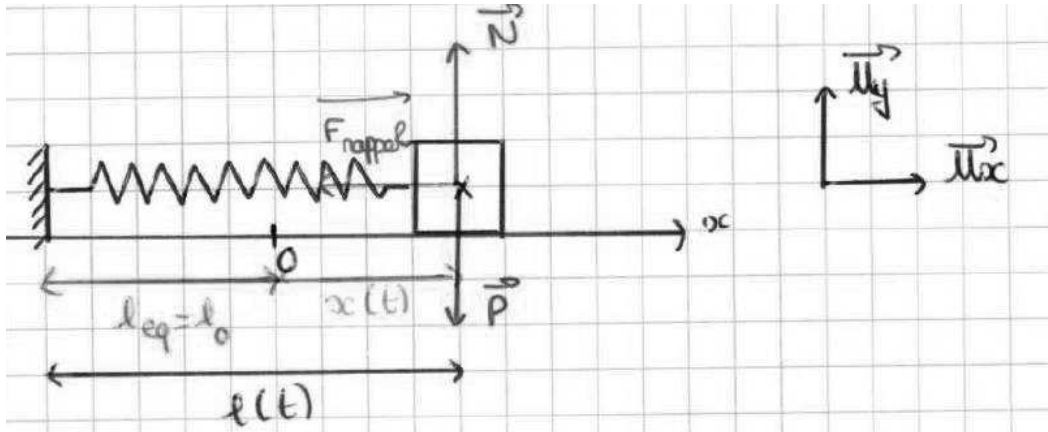
Partie A : Ressort sans amortissement et sans excitation.

1) Système : {plateforme de masse m }.

Référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = -mg\vec{U}_y$
- Réaction du support : $\vec{N} = N\vec{U}_y$
- Force de rappel élastique : $\vec{F}_{rappel} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{U}_x = -k(\ell_0 + \ell(t) - \ell_0)\vec{U}_x = -kx(t)\vec{U}_x$



Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{rappel} = m\vec{a}$$

On projette selon $\vec{U}_x$:

$$-kx(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

2) On met sous forme canonique :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Je reconnais l'équation d'un oscillateur harmonique avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution de l'équation homogène :

$$x_h(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Solution particulière :

$$x_p = cste = 0$$

Solution générale :

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Détermination des constantes à l'aide des CI :

$$x(t=0) = x_0 = A$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = B \omega_0 \Leftrightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}$$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

3) On sait que : $R_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$$

$$x(t) = R_0 \cdot \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

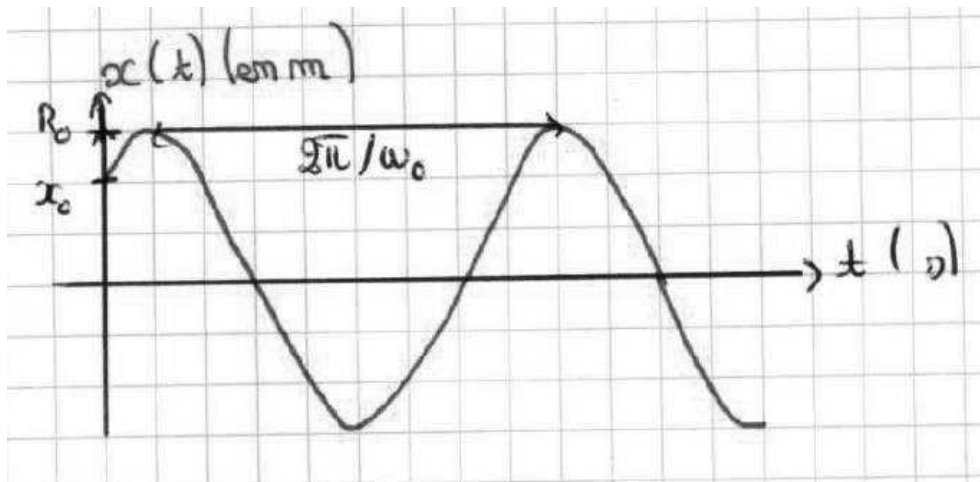
$$x(t=0) = x_0 = R_0 \cdot \cos(-\phi_0) = R_0 \cdot \cos(\phi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -R_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t - \phi_0)$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = -R_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(-\phi_0) = R_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\phi_0)$$

$$\tan(\phi_0) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}$$

4)



5) On calcule $E(t)$

$$E(t) = K(t) + U(t)$$

$$\Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t)$$

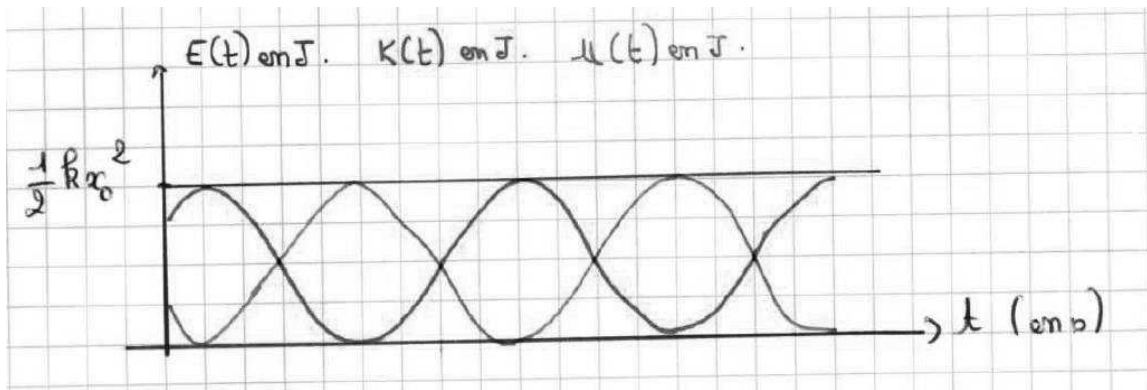
$$\Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2} m [-R_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t - \phi_0)]^2 + \frac{1}{2} k [R_0 \cdot \cos(\omega_0 t - \phi_0)]^2$$

$$\Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2} m \cdot R_0^2 \cdot \frac{k}{m} \cdot \sin^2(\omega_0 t - \phi_0) + \frac{1}{2} k \cdot R_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t - \phi_0)$$

$$\Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2} k R_0^2$$

Commentaire : $E(t)$ est en réalité une constante. C'est normal, il n'y a pas de perte d'énergie puisque les frottements sont négligés.

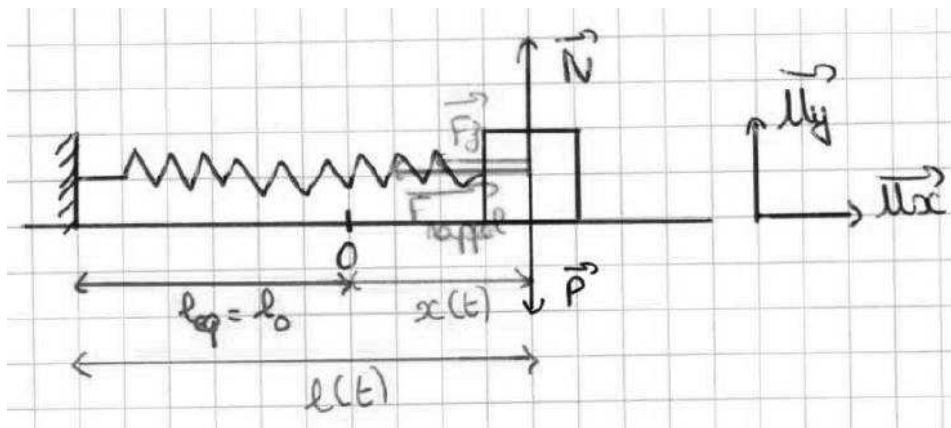
6)



Partie B : Ressort avec amortissement et sans excitation.

7) Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = -mg\vec{U}_y$
- Réaction du support : $\vec{N} = N\vec{U}_y$
- Force de rappel élastique : $\vec{F}_{rappel} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{U}_x = -k(\ell_0 + \ell(t) - \ell_0)\vec{U}_x = -kx(t)\vec{U}_x$
- Force de frottements : $\vec{F}_f = -\gamma\dot{x}(t)\vec{U}_x$



Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{rappel} + \vec{F}_f = m\vec{a}$$

On projette selon $\vec{U}_x$:

$$-kx(t) - \gamma\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{\gamma}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

On identifie :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{\gamma}{m} = \omega_0 \cdot 2 \cdot \zeta \Leftrightarrow \zeta = \frac{\gamma}{m \cdot 2 \cdot \omega_0}$$

$$\Leftrightarrow \zeta = \frac{\gamma}{2\sqrt{km}}$$

8) On a un régime pseudo périodique si : $\Delta < 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (2\zeta\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow 4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow 4\omega_0^2(\zeta^2 - 1) < 0 \\ &\Leftrightarrow \zeta^2 - 1 < 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \zeta < 1$$

$$x(t=0) = x_0$$

$$\Leftrightarrow A_1 = x_0$$

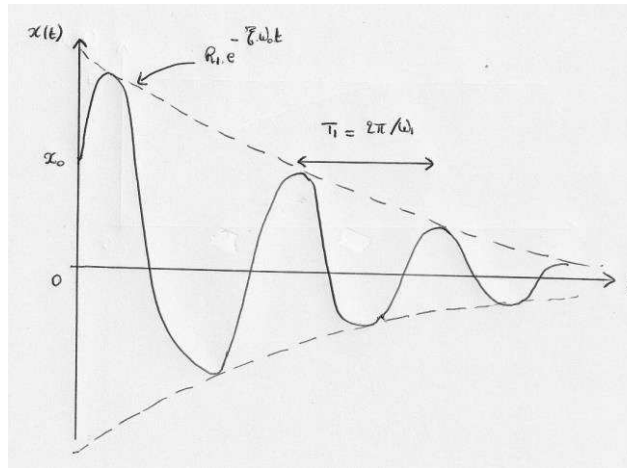
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t} [x_0 \cdot \cos(\omega_1 t) + B_1 \cdot \sin(\omega_1 t)] \\ &\quad + e^{-\zeta\omega_0 t} \cdot [-x_0 \cdot \omega_1 \cdot \sin(\omega_1 t) + B_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\omega_1 t)] \\ \dot{x}(t=0) &= \dot{x}_0 \Leftrightarrow -\zeta\omega_0 x_0 + B_1 \omega_1 = \dot{x}_0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow B_1 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_1}$$

9) De la même manière que dans la question 3) on établit que :

$$R_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad \text{et} \quad \tan \varphi_1 = \frac{B_1}{A_1}$$

10) Allure de $x(t)$:



11) Nous savons que $E_m(t) = \frac{1}{2}k \cdot x(t)^2 + \frac{1}{2}m \cdot \dot{x}(t)^2$ avec :

$$x(t) = R_1 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t - \varphi_1)$$

$$\dot{x}(t) = -\zeta \cdot \omega_0 \cdot R_1 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t - \varphi_1) - \omega_1 \cdot R_1 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t - \varphi_1)$$

Et :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 &= \left(-\zeta \cdot \omega_0 \cdot R_1 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t - \varphi_1) - \omega_1 \cdot R_1 \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t - \varphi_1) \right)^2 \\ &= \omega_1^2 \cdot R_1^2 \cdot e^{-2\zeta \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin^2(\omega_1 \cdot t - \varphi_1) \end{aligned}$$

dans l'hypothèse que $\zeta^2 \ll 1$.

On en déduit que :

$$E_m(t) = \frac{1}{2} k. R_1^2 . e^{-2.\zeta.\omega_0.t} . \cos^2(\omega_1.t - \varphi_1) + \frac{1}{2} m. \omega_1^2 . R_1^2 . e^{-2.\zeta.\omega_0.t} . \sin^2(\omega_1.t - \varphi_1)$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2} k. R_1^2 . e^{-2.\zeta.\omega_0.t} . (\cos^2(\omega_1.t - \varphi_1) + \sin^2(\omega_1.t - \varphi_1))$$

Avec $\omega_1 = \omega_0 . \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_0$ pour $\zeta^2 \ll 1$, en posant $k = m. \omega_0^2$.

$$E_m(t) = \frac{1}{2} k. R_1^2 . e^{-2.\zeta.\omega_0.t}$$

On vérifie que l'énergie mécanique subit une décroissance exponentielle. Dans le cas particulier où $\zeta = 0$, l'énergie mécanique est constante et conforme aux résultats établis pour l'oscillateur harmonique.

- 12) On utilise le théorème de l'énergie mécanique. La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives. Seules deux forces travaillent (les autres sont orthogonales au mouvement) : la force de rappel élastique (qui est conservative) et la force de frottement.

Donc on a :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_f)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE(t)}{dt} = -\gamma \vec{v} . \vec{v}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} < 0$$

Donc l'énergie est bien une fonction décroissante.

Commentaire : L'énergie mécanique est l'énergie totale du système. Or les forces de frottement sont des forces dissipatives : elles font perdre irrémédiablement de l'énergie au système.

- 13) On remarque sur le graphique que $x(t_2) = x(t_1 + T)$

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\zeta\omega_0 t} [A_d . \cos(\omega_1 t) + B_1 . \sin(\omega_1 t)]}{e^{-\zeta\omega_0 t} [x_0 . \cos(\omega_1(t + T)) + B_1 . \sin(\omega_1(t + T))]\right)}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(e^{\zeta\omega_0 T})$$

Car les fonctions trigonométriques sont T -périodiques.

Or $T = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$ car $\zeta \ll 1$.

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx 2\pi\zeta$$

- 14) A partir des valeurs indiquées sur la figure 2 ($x_1 = 0,014602 \text{ m}$ et $x_2 = 0,010661 \text{ m}$) on calcule : $\zeta = 0,0500 = 5,00 . 10^{-2}$ avec 2 C.S.

On vérifie que $\zeta^2 \ll 1$ et on peut faire l'hypothèse que $\omega_1 = \omega_0$. Sachant que $k = m \cdot \omega_0^2$ on détermine $k = 271 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Sachant que $\gamma = 2 \cdot m \cdot \zeta \cdot \omega_0$ on détermine $\gamma = 17,3 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$.

15) De la même manière qu'à la question 7), en appliquant le principe fondamental de la dynamique au système, on établit que :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{rappel} + \vec{F}_f + \vec{F}_{exc} = m\vec{a}$$

En tenant compte des résultats établis précédemment, on établit que :

$$\ddot{x} + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega \cdot t)$$

16) On considère que le système est en régime forcé dès lors que l'on peut négliger le régime transitoire devant la solution harmonique (cf cours).

17) En adoptant les notations complexes :

$$\underline{x}(t) = X \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \varphi)} = \underline{X} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

L'équation différentielle devient :

$$\ddot{\underline{x}}(t) + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \dot{\underline{x}}(t) + \omega_0^2 \cdot \underline{x}(t) = \frac{F_0}{m} (e^{j \cdot \omega \cdot t})$$

En explicitant :

$$-\omega^2 \cdot \underline{x}(t) + 2 \cdot j \cdot \omega \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \underline{x}(t) + \omega_0^2 \cdot \underline{x}(t) = \frac{F_0}{m} (e^{j \cdot \omega \cdot t})$$

En factorisant $\underline{x}(t) = \underline{X} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$

$$(-\omega^2 + 2 \cdot j \cdot \omega \cdot \zeta \cdot \omega_0 + \omega_0^2) \cdot \underline{X} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = \frac{F_0}{m} (e^{j \cdot \omega \cdot t})$$

On en déduit que :

$$\underline{X} = \frac{F_0}{m} \left(\frac{1}{-\omega^2 + 2 \cdot j \cdot \omega \cdot \zeta \cdot \omega_0 + \omega_0^2} \right)$$

Avec $\underline{X} = X \cdot e^{-j \cdot \varphi}$ on vérifie que :

$$\begin{cases} X = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \omega)^2}} \\ \tan \varphi = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

18) On pose $M = k \cdot X / F_0$ et $r = \omega / \omega_0$:

$$M = \frac{k}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \omega)^2}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega_0 \cdot \omega)^2}}$$

$$M(r) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2.\zeta.r)^2}}$$

M est une grandeur sans dimension qui correspond au rapport du signal de sortie sur le signal d'entrée (équivalent à la fonction de transfert du filtre).

19) La fonction $M(r)$ admet un extremum si :

$$\frac{dM(r)}{dr} = \left(-\frac{1}{2}\right) f(r)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{df(r)}{dr}\right) = 0$$

$$\text{En posant } f(r) = (1-r^2)^2 + (2.\zeta.r)^2$$

Cette égalité est vérifiée pour :

$$\frac{df(r)}{dr} = -4.r + 4.r^3 + 8.\zeta.r = 0$$

Avec $r \neq 0$ on en déduit que $M(r)$ admet un maximum (l'étude asymptotique montre que l'extremum est un maximum...) pour (avec $\zeta \geq 0$) :

$$\zeta = \sqrt{\frac{1-r^2}{2}}$$

Posons qu'à la résonance $r = \omega_r/\omega_0$ on établit que :

$$\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1-2.\zeta^2}$$

20) A.N. : La période propre de la plateforme est $T_0 = 4,0 \text{ s}$. Avec $\zeta = 0,0500 = 5,00.10^{-2}$, $T_r = T_0 = 4,0 \text{ s}$. Avec $T = 8,0 \text{ s}$ on vérifie que la plateforme n'est pas à la résonance.

Exercice 3 Étude de la résonance d'un circuit bouchon

A Approche théorique

A.1 On associe à $u(t)$ et $e(t)$ les grandeurs complexes $\underline{e} = E_m e^{j\omega t}$ et $\underline{u} = \underline{U} e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe.

On associe les deux impédances de L et de C en parallèle $\underline{Z}_{LC} = \frac{jL\omega}{1+LC(j\omega)^2}$ et on applique la formule du pont diviseur de tension pour déterminer $\underline{U}$.

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{LC}}{\underline{Z}_{LC} + R} E_m = \frac{jL\omega}{R(1+LC(j\omega)^2) + jL\omega} E_m = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega + LC(j\omega)^2} E_m$$

En factorisant en haut et en bas par $j\frac{L}{R}\omega$ on obtient l'expression suivante $\underline{U} = \frac{E_m}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$

A.2 En prenant le module de l'expression précédente, on obtient $U_m = \frac{E_m}{\sqrt{1 + R^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}}$.

A.3 On obtient l'expression proposée en posant $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

A.4 La tension U_m passe par un maximum quelle que soit la valeur du facteur de qualité pour $\omega = \omega_0$

A.5 La bande passante $\Delta\omega$ est l'intervalle de pulsation dans laquelle le gain est supérieur au gain linéaire maximal divisé par $\sqrt{2}$. Le gain maximum étant égal à 1 (pour $\omega = \omega_0$), on résout ainsi $Q^2(x - \frac{1}{x})^2 = 1$ en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ soit $x - \frac{1}{x} \pm \frac{1}{Q} = 0$. En mettant au même dénominateur, on obtient le trinôme suivant : $x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$.

Le discriminant Δ de ce trinôme est positif et les deux solutions positives sont $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$. On retrouve ainsi $\Delta\omega = \omega_0 \Delta x = \frac{\omega_0}{Q}$ soit $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

B Approche expérimentale

B.1 Un multimètre utilisé en voltmètre (mode AC) permet de mesurer les tensions efficaces aux bornes du générateur et du dipôle LC parallèle. Il suffit alors, pour chaque valeur de la fréquence, de calculer le rapport des tensions efficaces.

B.2 Les tensions aux bornes du générateur et du dipôle LC sont observées sur les deux voies d'un oscilloscope. Le déphasage peut se lire en mode bi-courbes (on détermine alors le signe du déphasage en observant quelle tension est en avance sur l'autre, et on obtient sa valeur absolue en mesurant le décalage temporel δt entre les deux signaux, par $|\varphi| = 2\pi\delta t/T$) en dilatant suffisamment l'échelle de temps pour obtenir une mesure optimale. Une autre possibilité est d'utiliser en mode XY la méthode de Lissajoux qui est plus précise pour les faibles déphasages.

B.3 La courbe $H(f)$ admet un maximum. Cela signifie que si nous faisons varier f en maintenant E_m constant, nous observons un maximum de U_m donc une résonance en tension.

B.4 Nous obtenons par lecture $H_{max} = 1,0$ pour une fréquence de résonance $f_r = 1,6$ kHz.

B.5 À la résonance, pour $f = f_r = 1,6$ kHz, nous constatons que $\varphi = 0$. L'utilisation de l'oscilloscope en mode XY permet une détermination plus précise de la fréquence de résonance, en recherchant la fréquence pour laquelle on observe un segment de droite à l'écran.

B.6 Nous déduisons $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = 99$ mH.

B.7 Le facteur de qualité s'obtient en déterminant la bande passante Δf définie comme l'intervalle de fréquence pour lequel $H \geq H_{max}/\sqrt{2}$. Nous obtenons par lecture $H = H_{max}/\sqrt{2} = 0,70$ correspondant aux fréquences $f_b = 1,5$ kHz et $f_h = 1,7$ kHz. Nous en déduisons : $Q = \frac{f_r}{f_h - f_b} = 8,0$. La résonance peut être considérée comme aigüe.

B.8 D'après la partie théorique $R = Q\sqrt{\frac{L}{C}} = 8,0$ k Ω .