Correction du devoir surveillé n° 6

Problème 1 Filtrage et démodulation

A Étude expérimentale

A.1 Sur chaque oscillogramme, on observe n périodes T pendant une durée T_{tot}. Donc on peut écrire $T_{\text{tot}} = nT = \dfrac{n}{f}$ et en déduire $f = \dfrac{n}{T_{\text{tot}}}$.

$$f_1 = 50{,}0\,\text{Hz}, \quad f_2 = 7{,}00\,\text{kHz} \quad \text{et} \quad f_3 = 50{,}0\,\text{kHz}$$

On remarque que l'amplitude de la tension de sortie décroît avec la fréquence. Le filtre est a priori un filtre ᵽasse-bas.

A.2 Pour $f = f_2$, on mesure les amplitudes du signal d'entrée et du signal de sortie : $E_m = 1{,}0\,\text{V}$, $S_m = 0{,}31\,\text{V}$ d'où le gain $G = \dfrac{S_m}{E_m} = 0{,}31$

Le déphasage φ introduit par le filtre correspond au déphasage entre la tension d'entrée et la tension de sortie : $\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \Delta\varphi_{s/e} = -2\pi f_2 \tau_{s/e}$ où $\tau_{s/e}$ correspond au retard temporel du signal $s(t)$ par rapport au signal $e(t)$. On mesure ce retard temporel : $\tau_{s/e} = 5{,}2 \times 10^{-5}\,\text{s}$ ($s(t)$ est en retard par rapport à $e(t)$). $\varphi = -2{,}3\,\text{rad}$

A.2.1 Le diagramme de Bode expérimental confirme notre hypothèse sur le filtre passe-bas : le gain est maximal pour les signaux de basses fréquences et il tend vers 0 en hautes fréquences.

A.2.2 On mesure la pente p de l'asymptote haute fréquence en considérant la variation du gain en dB sur deux décades :

$$p = \frac{\Delta G_{\text{dB}}}{2} = \frac{-95 + 15}{2} = -40\text{dB/décade}$$

Il s'agit donc a priori d'un filtre d'ordre 2.

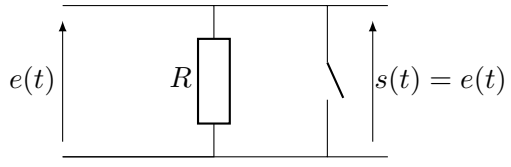
A.2.3 On considère le gain en dB maximal $G_{\text{dB,max}}$ et on trace une horizontale à $G_{\text{dB,max}} - 3$, le point d'intersection entre cette horizontale et le gain en dB a pour abscisse la fréquence du coupure du filtre. On lit :

$$f_c = 4{,}0\,\text{kHz}$$

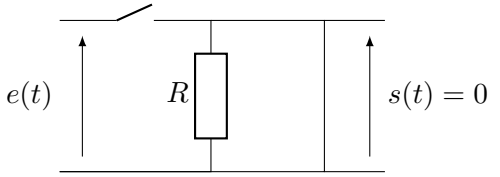
B Étude théorique

Réalisons maintenant une étude théorique de ce filtre.

B.1 Traçons les schémas équivalents à très basse et très haute fréquences :
À très basse fréquence :



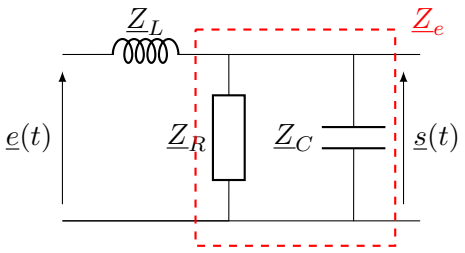
La tension de sortie est égale à la tension d'entrée : le filtre laisse passer les signaux de basse fréquence.
À très haute fréquence :



La tension de sortie est nulle : le filtre coupe les signaux de haute fréquence.

Cette étude confirme la nature ᵽasse-bas du filtre.

B.2 On se place en régime forcé et on adopte la notation complexe :



Déterminons l'impédance équivalente $\underline{Z}_e$:

$$\underline{Z}_e = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

À l'aide d'un pont diviseur de tension :

$$\underline{s}(t) = \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_L}\underline{e}(t)$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_L}$$

$$\underline{H} = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{\frac{R}{1 + jRC\omega} + jL\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{R}{R + jL\omega(1 + jRC\omega)}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$$

On introduit $H_0 = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ pour écrire la fonction de transfert du filtre passe bas du 2ème ordre sous forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

B.3 On a désormais $\sqrt{LC} = \sqrt{2}RC$, donc $R = \frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{2}C} = \sqrt{\frac{L}{2C}}$, ainsi le facteur de qualité est $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La fonction de transfert devient :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Calculons alors le gain $G = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ et

$$G = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$G = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}}$$

B.4

B.4.1 Le gain en dB se calcule à partir du gain $G_{\text{dB}} = 20\log G$. On utilise les équivalents haute et basse fréquences du gain pour déterminer les asymptotes :

— À TBF, $G \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$, d'où $G_{\text{dB,TBF}} = 0$. Le gain en dB admet une asymptote horizontale à 0 dB.

— À THF, $G \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\omega_0^4}{\omega^4}} = \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$, d'où $G_{\text{dB,THF}} = -40\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$. Le gain en dB admet une asymptote oblique de pente -40 dB/dec.

B.4.2 On remarque que les deux asymptotes se croisent lorsque $-40\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) = 0$ soit lorsque $\omega = \omega_0 = 2\pi f_0$. À l'aide du tracé des asymptotes, on lit sur le graphes $f_0 = 4{,}0$ kHz.

B.4.3 $\omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $L = \dfrac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$, on déjà montré que $R = \sqrt{\dfrac{L}{2C}}$.
A.N. : $L = 0{,}16$ H et $R = 2{,}8 \times 10^3\ \Omega$

B.5

B.5.1 Lorsque $\omega = \omega_0$, $\arg(\underline{H}) = \arg\left(\dfrac{1}{j\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

B.5.2 On retrouve cette valeur sur le diagramme de Bode en phase.

B.6

B.6.1 La pulsation de coupure du filtre vérifie $G(\omega_c) = \dfrac{H_0}{\sqrt{1+\dfrac{\omega_c^4}{\omega_0^4}}} = \dfrac{H_0}{\sqrt{2}}$. Donc

$$\omega_c = \omega_0 \quad \text{ou} \quad f_c = f_0$$

B.6.2 La bande passante du filtre est donc $B.P. = [0, 4{,}0\,\text{kHz}]$.

C Application à la démodulation d'un signal modulé en amplitude

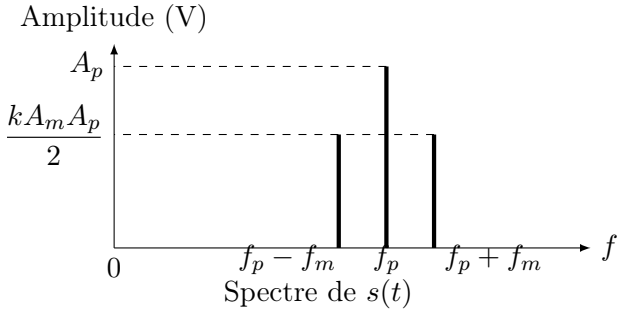
C.1 On étudie le signal $s(t)$:

$$s(t) = A_p(1 + kA_m\cos(2\pi f_m t))\cos(2\pi f_p t)$$

$$s(t) = A_p\cos(2\pi f_p t) + kA_pA_m\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_p t)$$

$$s(t) = A_p\cos(2\pi f_p t) + \frac{kA_pA_m}{2}\cos(2\pi(f_p+f_m)t + \frac{kA_pA_m}{2}\cos(2\pi(f_p-f_m)t)$$

En linéarisant $s(t)$ on obtient donc trois composantes spectrales :



Spectre de $s(t)$

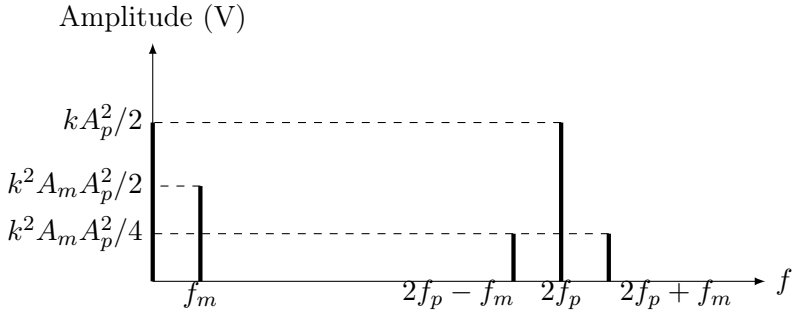
C.2 On procède de la même manière avec le signal $s'(t)$:

$$s'(t) = ks(t)p(t) = kA_p^2(1 + kA_m\cos(2\pi f_m t))\cos^2(2\pi f_p t)$$

or $\cos^2(2\pi f_p t) = \dfrac{1+\cos(4\pi f_p t)}{2}$, d'où

$$s'(t) = \frac{kA_p^2}{2} + \frac{kA_p^2A_m}{2}\cos(2\pi f_m t) + \frac{k^2A_mA_p^2}{2}\cos(2\pi f_m t)\cos(4\pi f_p t) + \frac{k^2A_p^2}{2}\cos(4\pi f_p t)$$

$$s'(t) = \frac{kA_p^2}{2} + \frac{kA_p^2A_m}{2}\cos(2\pi f_m t) + \frac{k^2A_p^2}{2}\cos(4\pi f_p t) + \frac{k^2A_mA_p^2}{4}\cos(2\pi(2f_p - f_m)t) + \frac{k^2A_mA_p^2}{4}\cos(2\pi(2f_p + f_m)t)$$



Spectre de $s'(t)$

C.3 Le filtre passe-bas doit permettre de ne garder que le signal de fréquence f_m et la valeur moyenne (= la composante continue). Grâce à cette contrainte de 80 dB, on atténue d'un facteur 10^4 les signaux qu'on ne désire pas garder situés au voisinage de la fréquence $2f_p$, ce qui permet de les éliminer.

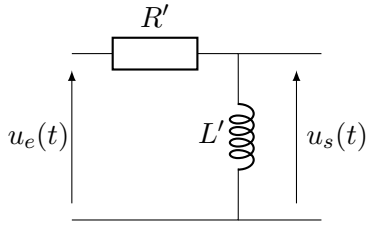
C.4 D'après le diagramme de Bode fourni, le gain de dB vaut $-80\,\text{dB}$ pour $f = 4{,}0 \times 10^5\,\text{Hz} \simeq 2f_p = 3{,}7 \times 10^5\,\text{Hz}$. Le filtre de Butterworth choisi ici est donc bien adapté.

C.5 Dans ces conditions, et compte-tenu du fait que $f_m \ll f_c = f_0$, le gain et le déphasage qui s'appliquent à la composante continue et à la fréquence f_m sont : $G(0) = 1$, $\varphi(0) = \arg(1) = 0$ et $G(f_m) \simeq 1$, $\varphi(f_m) = 0$. Finalement, on conserve la composante continue et la composante de plus basse fréquence de $s'(t)$ intactes à la sortie du filtre, ce qui donne

$$s''(t) = \frac{kA_p^2}{2} + \frac{kA_p^2A_m}{2}\cos(2\pi f_m t)$$

C.6 Pour récupérer uniquement le signal modulant. Il faut concevoir un filtre passe-haut caractérisé par une fréquence de coupure f_c' suffisamment petite devant f_m. Par exemple : $f_c' \simeq \dfrac{f_m}{10}$ ce qui permet d'assurer la conservation de la composante spectrale de fréquence f_m dans le signal de sortie tout en éliminant la composante continue.

On peut utiliser le circuit suivant :



Ce circuit sera caractérisé par une fréquence de coupure $f_c' = \dfrac{\omega_c}{2\pi} = \dfrac{L'}{2\pi R'}$ et on souhaite que $f_c \simeq \dfrac{f_m}{10} = 3{,}0 \times 10^1\,\text{Hz}$.

On choisit une résistance $R' = 100\,\Omega$, il faut alors prendre une inductance $L' = \dfrac{R'}{2\pi\dfrac{f_m}{10}}$ soit $L' \simeq 0{,}5\,\text{H}$.

Problème 2 Oscillateur quasi sinusoïdal en électronique

A Étude du filtre

A.1 La propriété du filtre qui permet son étude en RSF est la linéarité. Pour tout signal $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$ est associé la notation complexe $\underline{u}$ telle que $u(t) = \mathbb{R}e(\underline{u})$. $\underline{u}$ s'écrit alors $\underline{u} = \underline{U}\exp(\text{j}\omega t)$ avec $\underline{U} = U_m\exp(\text{j}\varphi)$ l'amplitude complexe. Les signaux périodiques étant décomposables en une somme de signaux sinusoïdaux, la connaissance de la fonction de transfert pour chacune des fréquences permet de reconstruire le signal de sortie.

A.2 L'impédance d'un condensateur de capacité C s'écrit : $\underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$, en très basse fréquence Z_C tend vers l'infini, il est donc équivalent à un interrupteur ouvert (si $Z_c \to \infty$, $i = 0$) alors qu'en très haute fréquence $Z_C \to 0$ ($u = 0$) et le condensateur se comporte comme un fil. Pour la bobine d'inductance L, $Z_L = \mathrm{j}L\omega$, la bobine se comporte comme un fil en très basse fréquence et comme un interrupteur ouvert en très haute fréquence.

A.3 En utilisant les comportements de la bobine et du condensateur, la tension $v_2(t)$ est la tension aux bornes d'un fil en très basse et haute fréquence. Le filtre est donc opaque en basse et haute fréquence. Il s'agit d'un filtre passe-bande.

A.4 On appelle $\underline{Y}$ l'admittance équivalente du dipôle RLC parallèle : $\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$ La fonction de transfert $\underline{H}_F(\mathrm{j}\omega)$ s'obtient à l'aide d'un diviseur de tension : $\underline{H}_F(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1/\underline{Y}}{R_0 + 1/\underline{Y}} = \dfrac{1}{1 + R_0\underline{Y}} = \dfrac{1}{1 + \frac{R_0}{R} + \mathrm{j}R_0\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)} = \dfrac{\frac{R}{R+R_0}}{1 + \mathrm{j}\frac{RR_0}{R+R_0}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$. On identifie alors la forme souhaitée :

$$\underline{H}_F(\mathrm{j}f) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q_F\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

avec $H_0 = \dfrac{R}{R + R_0}$, $Q_F = \dfrac{RR_0}{R + R_0}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

A.5 Les fréquences de coupure correspondent aux fréquences pour lesquelles le gain linéaire est égal au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$. La bande passante d'un filtre est la plage de fréquence pour lesquelles le gain linéaire est supérieur au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$. L'expression reliant le facteur de qualité Q_F, la fréquence propre f_0 et la bande passante passante à -3 dB Δf est $Q_F = \dfrac{f_0}{\Delta f}$.

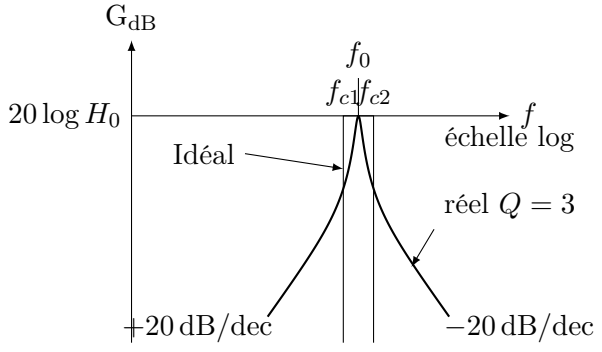
A.6 En très basse fréquence la fonction de transfert équivalente s'écrit $\underline{H}_F \simeq \dfrac{\mathrm{j}H_0 f}{Q_F f_0}$. L'asymptote du gain en décibel s'écrit alors $G_{dB_0} = 20\log\frac{H_0}{Q_F} + 20\log\frac{f}{f_0}$. On identifie un pente à 20dB/décade dans le diagramme asymptotique. Pour la la phase elle correspond à l'argument de j, on a alors $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

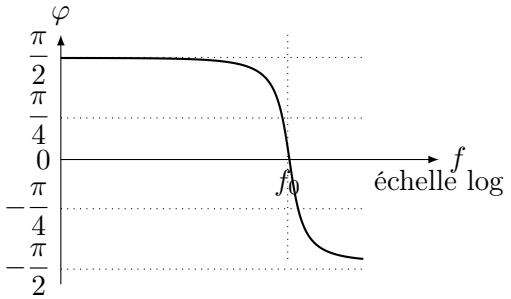
En très haute fréquence la fonction de transfert équivalente s'écrit $\underline{H}_F \simeq \dfrac{H_0 f_0}{\mathrm{j}Q_F f}$. L'asymptote du gain en décibel s'écrit alors $G_{dB_\infty} = 20\log\frac{H_0}{Q_F} - 20\log\frac{f}{f_0}$. On identifie un pente à -20dB/décade dans le diagramme asymptotique. Pour la la phase elle correspond à l'argument de $\frac{1}{\mathrm{j}}$ soit $\varphi_\infty = -\frac{\pi}{2}$.

On identifie que les deux asymptotes en gain se croisent pour $f = f_0$ pour un gain $G_{dB} = 20\log\frac{H_0}{Q}$.

A.7 Avec les valeurs numériques fournies, on obtient $H_0 = \dfrac{R}{R + R_0}0{,}20$, $Q_F = \dfrac{RR_0}{R + R_0}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 3{,}0$ et $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Hz}$. Les valeurs proposées sont donc pertinentes.

A.8 Diagramme asymptotique





B Étude de l'amplificateur

B.1 Les trois caractéristiques d'un ALI idéal sont :

- une impédance d'entrée infinie, par conséquent les courants d'entrée sont nuls
- une impédance de sortie nulle, l'ALI se comporte alors comme une source de tension idéale.
- un gain différentiel infini : $\mu_d = \frac{V_s}{V_+ - V_-}$. Par conséquent lors d'un fonctionnement linéaire $V_+ = V_-$.

B.2 On reconnaît sur les deux montages une rétroaction sur l'entrée inverseuse. Les ALI fonctionnent en régime linéaire et $V_+ = V_-$. L'impédance d'entrée de l'ALI étant infinie dans le premier montage : $i_e = \frac{v_e}{R_1} = \frac{V_- - v_s}{R_2}$. Sachant que $V_- = V_+ = 0$, on a ainsi $\underline{A}_1 = -\frac{R_2}{R_1}$. C'est un montage amplificateur inverseur.

Pour le montage 2, on $V_- = V_+ = \frac{R_1}{R_1+R_2} v_s$ d'après la formule du pont diviseur de tension. Soit $\underline{A}_2 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Il s'agit d'un amplificateur non inverseur.

B.3 $\underline{Z}_{e1} = R_1$ puisque $V_- = 0$ et $\underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_{e,ALI} \approx \infty$; l'impédance d'entrée de l'amplificateur 2 étant infinie, il est préférable de choisir ce montage pour qu'il n'y pas d'impact lors de la mise en cascade de différents montages (on pourra alors multiplier les fonctions de transfert entre elles).

B.4 D'après la réponse à la question précédente : $\underline{H}_{FA} = \frac{\underline{v}_3}{\underline{v}_1} = \frac{\underline{v}_3}{\underline{v}_2}\frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1} = \underline{A}_2\underline{H}_F$, soit $\underline{H}_{FA} = \dfrac{H_1}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ avec $H_1 = \underline{A}_2 H_0 = \dfrac{R(R_1+R_2)}{R_1(R+R_0)}$, $Q = Q_F = \dfrac{RR_0}{R+R_0}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $x = \dfrac{f}{f_0}$.

C Étude des oscillations

C.1 À partir de la fonction de transfert on obtient l'équation différentielle en remplaçant les multiplications par $\mathrm{j}\omega$ par des dérivées. $\dfrac{\mathrm{d}^2 v_3}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 v_3 = H_1 \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}$. De plus lorsque l'interrupteur est fermé $v_1 = v_3$ soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_3}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 v_3 = 0$$

avec $\omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

C.2 Pour obtenir des oscillations d'amplitude croissante, il faut que le discriminant du polynôme caractéristique soit négatif (solution complexe associée à des oscillations) et que le coefficient réel $-b/2a$ soit positif. Il faut alors que H_1 soit supérieur à 1 (autrement dit l'amplificateur doit compenser, l'énergie perdue par les résistances par effet Joule). Le discriminant de l'équation caractéristique s'écrit : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - H_1)^2 - 4\omega_0^2$. Pour que ce discriminant soit négatif d'où $H_1 - 1 < 2Q$ et $H_1 < 1 + 2Q$. Finalement H_1 doit être encadré par $1 < H_1 < 1 + 2Q$.

C.3 Si la condition précédente est vérifiée, la pulsation des oscillations correspond à la partie imaginaire de la racine de l'équation caractéristique : $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{(H_0-1)^2}{4Q^2}}$ et $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

C.4 Si $H_0 = 1$ et $f = f_0$ et l'équation différentielle vérifiée par v_3 est l'équation d'un oscillateur harmonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2 v_3}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 v_3 = 0$.