

## Problème I Un hommage à Tesserenc de Bort

Si le premier ballon-sonde au dihydrogène est dû à Gustave Hermitte et Georges Besançon (1892), c'est incontestablement à l'ingéniosité et à la ténacité de l'atypique Léon Teisserenc de Bort (1855-1913) que nous devons la mise au point des techniques d'investigation par ballon-sonde et la première cartographie atmosphérique.

On note  $(Oz)$  l'axe vertical ascendant,  $z = 0$  au niveau du sol.  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ , avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

### A Étude de la troposphère

La troposphère est la partie de l'atmosphère terrestre inférieure à  $10 \text{ km}$ . On la considère comme un gaz parfait de pression  $P(z)$ , de température  $T(z)$  et de volume massique  $v(z)$ . Au sol, on a la pression  $P_0$  et la température  $T_0$ . Elle est en équilibre thermodynamique et mécanique et obéit à la loi polytropique empirique

$$P^{-k}(z)T(z) = P_0^{-k}T_0 \quad \text{avec } k = 0,15 \quad (1)$$

On donne :  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

#### A.1 Questions préliminaires

**A.1.1** Comment peut-on qualifier la transformation correspondant au cas  $k = 0$  ?

**A.1.2** Définir les mots « homogène » et « isotrope ». Caractérisent-ils la troposphère ?

**A.1.3** Donner l'équation d'état d'un gaz parfait liant  $P(z)$ ,  $v(z)$ ,  $R$ ,  $M_{air}$  et  $T(z)$  (loi (2)).

**A.1.4** Exprimer la loi de la statique des fluides avec  $g$ ,  $\frac{dP}{dz}$  et  $v(z)$  (loi (3)).

#### A.2 Détermination du gradient thermique

**A.2.1** Le gradient thermique est  $\frac{dT}{dz}\vec{u}_z = -\delta\vec{u}_z$ . Déduire  $\delta$  en fonction de  $k$ ,  $M_{air}$ ,  $g$  et  $R$  à partir des lois (1), (2) et (3).

**A.2.2** Donner la loi de variation  $T(z)$  en fonction de  $T_0$ ,  $\delta$  et  $z$ .

#### A.3 Évolution du volume d'une quantité de gaz constante

On considère une quantité constante de  $n$  moles de gaz parfait à l'altitude  $z$  qui évolue dans la troposphère. On note  $V(z)$  le volume qu'elle occupe à l'altitude  $z$  et  $V_0$  son volume au sol. Déterminer la loi  $\frac{V(z)}{V_0}$  en fonction de  $\delta$ ,  $z$ ,  $T_0$  et  $k$ .

*La troposphère fut dénommée ainsi en 1902 par Léon Teisserenc de Bort à partir de la racine « tropos », le changement. Il découvrit aussi la stratosphère.*

### B Ascension d'un ballon sonde

Le ballon sonde dégonflé et instrumenté a une masse totale  $m_B = 1,2 \text{ kg}$ . On gonfle au sol son enveloppe avec  $n_0$  moles de dihydrogène. Son volume est alors  $V_0$ . L'enveloppe reste fermée tant que son volume  $V(z) < V_{max} = 10V_0$ . Lorsque  $V(z) = V_{max}$ , l'enveloppe se déchire et le ballon retombe au sol.

**B.1** Quels sont les avantages et les inconvénients du dihydrogène ?

**B.2** Phase ascensionnelle à enveloppe hermétiquement fermée

Sur ce ballon s'exerce une force de frottement  $\vec{F}_{fro}$ . La force totale s'exerçant sur le ballon est  $(F - m_b g)\vec{u}_z + \vec{F}_{fro}$ .

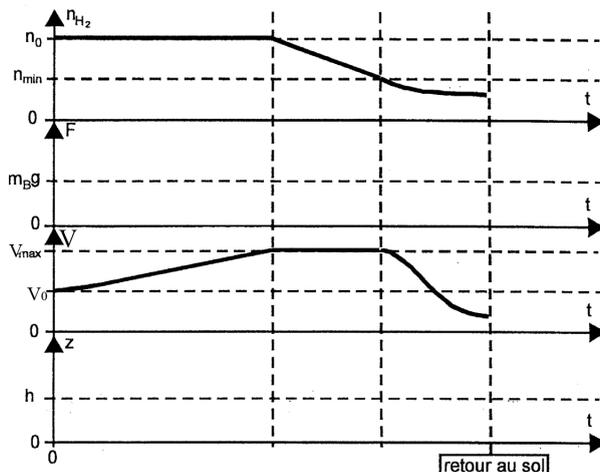
**B.2.1** En effectuant un bilan des forces, déterminer le terme  $F$  en fonction de  $n_0$ ,  $g$ ,  $M_{H_2}$  et  $M_{air}$ .

**B.2.2** Calculer la valeur minimale  $n_{min}$  de  $n_0$  pour que le ballon décolle.

**B.2.3** On admet le modèle de troposphère précédent. Durant l'ascension, on peut considérer que la pression et la température sont quasiment identiques à l'intérieur et à l'extérieur du ballon. Calculer  $h$ , altitude maximale atteinte en prenant  $T_0 = 293 \text{ K}$ . Commenter le résultat.

**B.3** Étude qualitative dans le cas d'une petite déchirure

Dans le cas d'une petite déchirure, le ballon ne retombe pas instantanément au sol. Il se vide lentement de son gaz. On propose une simulation graphique de sa descente. Compléter les graphes  $F(t)$  et  $z(t)$  du document réponse fourni. La représentation est qualitative, mais un soin particulier doit être apporté afin de respecter les lois de la physique étudiées précédemment.



Les actuels ballons sont radio-sondes depuis 1927. Le problème de la récupération du matériel est aussi secondaire. L'altitude atteinte par ce type de ballon est de l'ordre de 25-30 km. Ils sont depuis une dizaine d'années remplis d'hélium.

## Problème II Attraction gravitationnelle

La troisième partie de ce problème est indépendante des deux premières

On considère dans ce problème que la Terre possède une répartition de masse à symétrie sphérique, de centre  $O$ , de masse  $M_T$  et de rayon  $R_T$ . On pourra donc considérer que le champ gravitationnel créé par la Terre en un point  $M$ , extérieur à la Terre, est identique à celui créé par une masse ponctuelle  $M_T$  placée en  $O$ .

### A Satellite en mouvement autour de la Terre

On étudie le mouvement autour de la Terre d'un satellite  $S$  de masse  $m$  placé dans le champ gravitationnel terrestre. On néglige les frottements.

**A.1** Rappeler l'expression du champ gravitationnel  $\vec{g}(M)$  créé par la Terre en un point  $M$  de l'espace. On notera  $G$  la constante de gravitation universelle et on exprimera  $\vec{g}(M)$  en fonction de  $G$ ,  $M_T$ ,  $r$  et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

#### Caractéristiques du mouvement du satellite autour de la Terre

**A.2** On se place dans le référentiel, considéré comme galiléen, qui a pour origine le centre de la Terre et ses trois axes dirigés vers « trois étoiles fixes ». Quel est le nom de ce référentiel ?

**A.3** Déterminer l'expression de la force  $\vec{f}$  à laquelle le satellite est soumis. On exprimera  $\vec{f}$  en fonction de  $m$ ,  $G$ ,  $M_T$ ,  $r$  et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. Quelle est l'expression de la force  $\vec{f}'$  à laquelle la Terre est soumise de la part du satellite.

**A.4** En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le mouvement du satellite est nécessairement plan. Sachant qu'à l'instant  $t = 0$ , le satellite se trouve au point  $M_0$  et a une vitesse  $v_0$ , préciser le plan dans lequel se fait le mouvement.

**Dans la suite de cette partie, on se placera dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon  $r$  et d'altitude  $h$  autour de la Terre (avec  $r = h + R_T$ ) et on utilisera les coordonnées cylindriques.**

L'espace est rapporté à la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ , un point quelconque étant repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ . Le plan dans lequel se fait le mouvement du satellite est le plan du repère cylindrique contenant l'origine  $O$  (centre de la Terre) et les vecteurs  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .

**A.5** Rappeler l'expression du vecteur position en coordonnées cylindriques et retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération.

**A.6** En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que le module  $v$  de la vitesse du satellite  $S$  est nécessairement constant au cours du mouvement et déterminer son expression en fonction de  $G$ ,  $M_T$  et  $r$ .

**A.7** Déterminer l'expression de la période  $T$  du mouvement de rotation de  $S$  autour de la Terre en fonction de  $v$  et de  $r$  puis en fonction de  $G$ ,  $M_T$  et  $r$ . En déduire la troisième loi de Kepler.

**A.8** Indiquer une méthode pour déterminer la masse de la Terre. Donner sans justification l'ordre de grandeur de la masse de la Terre.

**A.9** Un autre satellite  $S'$ , de masse  $m'$ , en orbite circulaire autour de la Terre à une trajectoire de rayon  $r$  égal au rayon de la trajectoire de  $S$ . Les deux satellites tournent dans le même plan.  $S$  et  $S'$  risquent-ils de se heurter au cours de leur mouvement ? On justifiera la réponse apportée.

## B Étude énergétique

La force à laquelle le satellite  $S$  est soumis dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  telle que  $E_p$  peut s'écrire sous la forme  $E_p = -\frac{\alpha}{r}$  avec  $\alpha$  une constante positive. On prendra par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.

**On ne se limite pas dans cette partie à un mouvement circulaire mais dans le cas d'un mouvement quelconque du satellite.**

On notera  $C$  la constante des aires données par :  $C = r^2\dot{\theta}$ .

**B.1** Déterminer l'expression de  $\alpha$  en fonction des données du problème.

**B.2** Déterminer l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  du satellite  $S$  en fonction de  $m$ ,  $r$ ,  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\alpha$ .

**B.3** En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective du satellite en fonction de  $m$ ,  $C$ ,  $r$  et  $\alpha$ . Donner l'allure de la représentation graphique de l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$ . En exploitant cette courbe, indiquer en fonction de la valeur de l'énergie mécanique le type de trajectoire suivie par le satellite et préciser dans chaque cas s'il s'agit d'un état de diffusion ou d'un état lié.

**B.4** Déterminer l'énergie mécanique  $E_{mc}$  associée à une trajectoire circulaire de rayon  $r_c$ , en fonction de  $r_c$ ,  $m$ ,  $G$  et  $M_T$ .

**B.5** Déterminer la première vitesse cosmique  $v_1$ , vitesse du satellite sur une orbite basse de rayon  $R_T$  autour de la Terre en fonction de  $R_T$ ,  $G$  et  $M_T$ .

## C Mesure de l'intensité du champ de pesanteur terrestre en un point

Un expérimentateur désire mesurer l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre. Il va pour cela utiliser tour à tour deux types de pendule.

**C.1** Quelle est la différence entre le champ de gravitation et le champ de pesanteur ?

### Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

Le pendule considéré est composé par une tige rigide de masse négligeable et de longueur  $\ell$  et d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  accroché à la tige. Ce pendule peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical  $(Oxy)$ , autour de l'axe horizontal  $(Oz)$ . La position de  $M$  est repérée par l'angle  $\theta$  entre la droite  $OM$  et la verticale descendante. L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements seront négligés. Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur  $\vec{g}$  tel que  $\vec{g} = g\vec{e}_x$ .

**C.2** En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$  au cours du temps. En déduire la période  $T$  des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre, repérée par  $\theta = 0$ . On exprimera  $T$  en fonction de  $\ell$  et  $g$ .

**C.3** On souhaite étudier l'influence d'une variation d'intensité  $\Delta g$  du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela on définit la sensibilité  $s$  du pendule comme le rapport  $s = \frac{\Delta T}{T}$  où  $\Delta T$  représente une variation infiniment petit de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite  $\Delta g$  du champ de pesanteur. Déterminer l'expression de  $s$  en fonction de  $\Delta g$  et  $g$ .

### Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel  $M = -K\theta$  sur le pendule où  $K$  est une constante positive. La position du pendule est repérée par l'angle  $\theta$  entre la droite  $(OM)$  et la verticale ascendante. Les frottements seront toujours négligés et l'étude sera menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Le pendule se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur  $\vec{g} = -g\vec{e}_x$ .

L'énergie potentielle du ressort spirale ne dépend que de l'angle  $\theta$  et de la constante  $K$  et est donnée par l'expression  $E_p(\theta) = \frac{1}{2}K\theta^2$ .

**C.4** Exprimer l'énergie mécanique totale  $E_m$  du système pendule-ressort en fonction de  $K$ ,  $\theta$ ,  $m$ ,  $\ell$ ,  $g$  et  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ .

**C.5** En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle  $\theta$ .

**C.6** En considérant que l'angle  $\theta$  reste petit, déterminer la condition à vérifier pour que la position  $\theta = 0$  soit une position stable d'un oscillateur harmonique. La relation sera donnée sous forme d'une relation entre  $K$ ,  $m$ ,  $g$  et  $\ell$ . Déterminer dans ce cas la période  $T$  des petites oscillations en fonction de  $K$ ,  $m$ ,  $g$  et  $\ell$ .

**C.7** On considère que la condition de la question précédente est vérifiée. On souhaite étudier la sensibilité  $s_1 = \frac{\Delta T}{T}$  de ce pendule à une variation  $\Delta g$  du champ de pesanteur. Déterminer l'expression de la sensibilité  $s_1$  en fonction de  $\Delta g$ ,  $K$ ,  $g$ ,  $\ell$  et  $m$ .

**C.8** Montrer que l'on peut choisir la constante  $K$  de telle sorte que le deuxième pendule soit plus sensible que le premier et permette ainsi de détecter des variations plus faible du champ de pesanteur terrestre. Exprimer cette condition sous forme d'une relation entre  $K$ ,  $g$ ,  $m$  et  $a$ .

# Problème III Navigation spatiale de la sonde Rosetta

Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov-Guérassimenko (67P/TG). La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5. Après un voyage de près de 10 ans pendant lequel elle aura parcouru près de 6,5 milliards de km, Rosetta a atteint la comète en août 2014 pour une période d'observation de 18 mois. La sonde est constituée d'un satellite principal et d'un atterrisseur (Philae). En novembre 2014, le module Philae a été envoyé à la surface de la comète. L'objet de cette épreuve est d'aborder quelques questions relatives à la mission Rosetta. On désigne dans l'énoncé par  $v$  le module du vecteur  $\vec{v}$ .



Tout résultat fourni par l'énoncé peut être utilisé par la suite même s'il n'a pas été obtenu par le candidat. Données numériques :

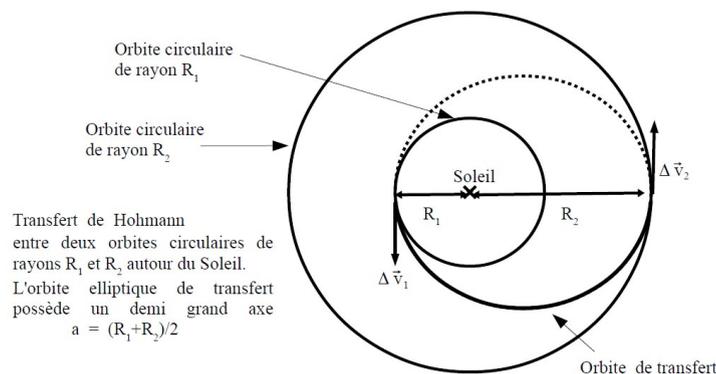
- Grandeurs physiques :
  - Masse du Soleil :  $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$  kg
  - Masse de la Terre :  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg
  - Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil : 1 unité astronomique (ua) =  $150 \cdot 10^6$  km
  - Rayon de la Terre :  $R_T = 6,4 \cdot 10^3$  km
  - Constante de gravitation universelle :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>kg<sup>-1</sup>s<sup>-2</sup>
- Données techniques relatives à Rosetta :
  - Masse à vide de Rosetta : 1300 kg
  - Charge utile du lanceur Ariane 5G+ : 6950 kg
- Caractéristiques de la comète Tchourioumov-Guérassimenko :
  - Distance du Soleil au moment du rendez-vous avec Rosetta : 3,3 ua
  - Diamètre du noyau : 4 km

## A Questions préliminaires

- A.1** On considère un objet à distribution de masse à symétrie sphérique de rayon  $R$ , de masse totale  $M$  et de centre  $O$ . Exprimer le champ de gravitation créé par cet objet à une distance  $r \geq R$  en l'assimilant à un point matériel.
- A.2** Donner l'expression de la force de gravitation  $\vec{F}$  que le Soleil exerce sur un objet de masse  $m$  situé à une distance  $r$  de son centre ( $r > R_S$  où  $R_S$  est le rayon du Soleil).
- A.3** Montrer que cette force est conservative et donner l'expression de l'énergie potentielle associée.
- A.4** Montrer que le mouvement d'un astre en orbite autour du Soleil est plan.
- A.5** On suppose que le mouvement de la Terre autour du Soleil est circulaire. Montrer que le mouvement est uniforme et retrouver l'expression (et la valeur) de la vitesse de la Terre.
- A.6** On note  $\omega$  la vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil. Donner la valeur de  $\omega$  puis retrouver la valeur numérique de la vitesse de la Terre.

## B Budget énergétique pour transfert orbital

Une façon simple d'envoyer un engin spatial d'une orbite circulaire à une autre (coplanaire) est de lui faire parcourir une orbite temporaire de transfert elliptique. Cette trajectoire est tangente aux orbites de départ et d'arrivée. Elle est appelée orbite de transfert de Hohmann. Deux impulsions sont nécessaires pour effectuer ce transfert. Une première impulsion engendre une variation de vitesse  $\Delta v_1$  (voir figure ci-dessous) ce qui permet le passage de l'orbite circulaire de départ vers l'orbite elliptique de transfert. Une seconde impulsion, associée à une variation de vitesse  $\Delta v_2$ , permet le passage de l'orbite de transfert vers l'orbite d'arrivée.



On indique que l'énergie mécanique d'un objet de masse  $m$  en orbite elliptique autour d'un corps de masse  $M$  est donnée par :  $E_m = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$  où  $a$  est le demi-grand axe de l'ellipse.

**B.1** En utilisant le raisonnement de la question A.5, rappeler l'expression de la vitesse  $v_1$  en fonction de  $G$ ,  $M_s$  et  $R_1$  pour la trajectoire circulaire de rayon  $R_1$ .

**B.2** Exprimer l'énergie mécanique sur l'orbite de transfert elliptique en fonction de  $v_1$ ,  $\Delta v_1$ ,  $G$ ,  $M_s$ ,  $m$  et  $R_1$ . En déduire que l'expression du paramètre  $\Delta v_1$  permettant de passer d'une orbite circulaire de rayon  $R_1$  à une orbite elliptique de demi grand axe  $a = \frac{R_1+R_2}{2}$  est :

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_s}{R_1}} \left( \sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right)$$

Le lanceur Ariane 5G+ utilisé pour la mission place dans un premier temps Rosetta sur une orbite héliocentrique de même rayon que celle de la Terre. La comète 67P/TG possède une trajectoire elliptique autour du Soleil dont le demi grand axe est de 3,5 ua. On supposera que la Terre possède une orbite quasi circulaire. On souhaite évaluer la valeur de  $\Delta v$  permettant de rejoindre la comète.

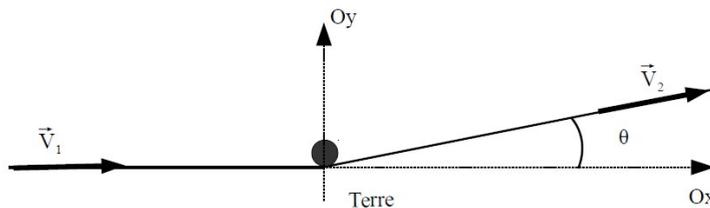
**B.3** Le périhélie de la comète, c'est à dire le point de la trajectoire le plus proche du Soleil est de l'ordre de 1 ua. On envisage une injection directe dans l'orbite de la comète depuis l'orbite circulaire de la Terre. Déterminer la valeur  $\Delta v$  nécessaire à cette manœuvre.

*Cette grandeur (appelée aussi budget  $\Delta v$ ) permet de déterminer la masse de carburant nécessaire aux différentes manœuvres. En pratique, lorsque plusieurs manœuvres sont nécessaires, chacune associée à une valeur  $\Delta v_i$ , le budget  $\Delta v$  correspond alors à la somme de ces dernières. Pour assurer le transfert, on peut montrer qu'il faut une masse de carburant de près de 16 tonnes. La masse de la sonde au décollage serait alors de 17 tonnes ce qui excède largement les capacités du lanceur (7 tonnes). Il n'est donc pas envisageable pour la sonde d'atteindre directement l'orbite de la comète Tchourioumov-Guérassimenko.*

## C Utilisation de l'assistance gravitationnelle

Afin de contourner les problèmes liés à la quantité limitée de carburant, la sonde Rosetta a utilisé une trajectoire permettant d'exploiter l'effet de fronde gravitationnelle (appelé aussi assistance gravitationnelle). Cette stratégie a permis à la sonde d'acquérir de la vitesse en limitant l'utilisation de carburant. En contrepartie, la durée de la mission devient plus longue...

Rosetta a utilisé trois assistances gravitationnelles en passant à proximité de la Terre. On propose dans cette question une étude simplifiée d'une assistance gravitationnelle. On se place dans le référentiel géocentrique appelé  $R_T$ . La sonde arrive de l'infini (c'est à dire hors de la zone d'influence gravitationnelle de la Terre) avec une vitesse  $\vec{V}_1$  dans le référentiel  $R_T$ . La sonde passe à proximité de la Terre puis s'éloigne ensuite à l'infini avec une vitesse asymptotique  $\vec{V}_2$  (figure ci-dessous).



**C.1** Montrer que l'on a  $V_1 = V_2$ .

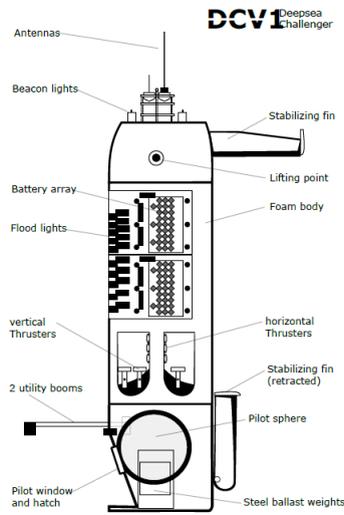
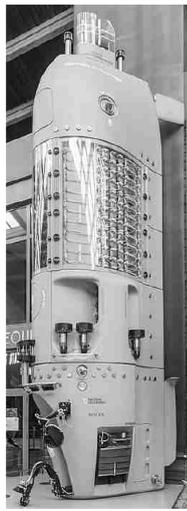
**C.2** On posera  $V = V_1 = V_2$ . Les vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  de la sonde dans le référentiel héliocentrique vérifient la loi de composition des vitesses :  $\vec{v}_1 = \vec{V}_1 + \vec{v}_T$  et  $\vec{v}_2 = \vec{V}_2 + \vec{v}_T$ . On suppose que dans le référentiel héliocentrique la vitesse de la Terre  $\vec{v}_T$  est dirigée suivant la direction  $Oy$  de la figure ci-dessus. Exprimer les vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  en fonction de  $V$ ,  $v_T$  et  $\theta$  dans la base  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  où  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  sont les vecteurs unitaires.

**C.3** En déduire l'expression de la variation  $\Delta v$  de la valeur de la vitesse  $\vec{v}$  de la sonde dans le référentiel héliocentrique à l'issue de son passage à proximité de la Terre en fonction de  $v_T$ ,  $V$  et  $\theta$ . Donner une estimation de  $\Delta v$  en prenant  $V = 5 \text{ km.s}^{-1}$  et  $\theta = 45^\circ$  (La valeur de  $v_T$  a été déterminée à la question A.5).

**C.4** Pour quelle raison selon vous, l'usage de l'assistance gravitationnelle augmente-t-il la durée du voyage vers la comète cible par rapport à une trajectoire directe ?

## Problème IV Deepsea Challenger

Ce sujet porte sur l'exploration des très grandes profondeurs à l'aide de sous-marins autonomes et s'attache à discuter des contraintes de sécurité liées à ces expéditions. Il reprend en particulier les données disponibles sur l'expédition menée par le réalisateur James Cameron dans la fosse des Mariannes, fosse océanique la plus profonde connue à ce jour, et son sous-marin nommé Deepsea Challenger.



On fournit ci-dessous certaines données numériques ; d'autres données relèvent de l'initiative du candidat.

**Données :**

- Accélération de la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$
- Masse volumique de l'eau de mer :  $\rho_0 = 1,02 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
- Coefficient de compressibilité isotherme de l'eau de mer :  $\chi_T = 4,41 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
- Coefficient de compressibilité isentropique de l'eau de mer :  $\chi_S = 4,10 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
- Profondeur de la fosse des Mariannes :  $z_{max} = 10,9 \text{ km}$
- Diamètre équivalent du sous-marin :  $D_{DC} = 2,11 \text{ m}$
- Diamètre intérieur équivalent de la zone habitable du sous-marin :  $D = 1,09 \text{ m}$
- Hauteur du sous-marin :  $H_{DC} = 7,30 \text{ m}$ .

**A Pression hydrostatique**

La contrainte principale à laquelle est soumis un sous-marin est celle liée à la pression exercée par le fluide environnant sur la structure de l'habitacle. L'évaluation des pressions rencontrées au fond de l'océan est donc cruciale pour déterminer les efforts que devront reprendre les parois qui protègent le pilote.

On se place dans un repère cartésien de centre  $O$ , placé sur l'interface eau-air, et d'axe  $Oz$  descendant.

**A.1** On suppose que le champ de pression  $P$  du fluide vérifie la relation  $\rho \vec{g} - \text{grad}P = \vec{0}$  (la démonstration de cette relation n'est pas attendue). Proposer une interprétation physique de celle-ci et indiquer la signification de chacun des termes.

**A.2** On suppose, dans cette question, que l'eau de mer est un fluide incompressible de masse volumique  $\rho_0 = \rho(z = 0)$ . En déduire l'expression de la pression  $P(z)$  à une profondeur donnée  $z$ , en fonction de  $P_0$  la pression atmosphérique,  $g$  l'intensité de pesanteur uniforme qui règne dans l'océan,  $\rho_0$  et  $z$ .

Lorsqu'on approche des profondeurs atteintes par James Cameron, le modèle du fluide incompressible peut éventuellement être remis en cause. On conserve l'hypothèse isotherme, mais on cherche à modéliser les variations de la masse volumique en introduisant le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau par :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

On considère désormais que l'océan est isotherme, mais que la masse volumique  $\rho$  est variable.

**A.3** Montrer que :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$$

**A.4** On suppose que la grandeur  $\chi_T$  est une constante. En utilisant la relation de la statique des fluides, montrer que la masse volumique varie avec la profondeur selon :

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 \chi_T g z}$$

**A.5** En déduire que l'on a :

$$P(z) = P_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \chi_T \rho_0 g z)$$

**A.6** La pression dans la fosse des Mariannes (profondeur  $z_{max} = 10,9 \text{ km}$  a été mesurée à  $1,13 \times 10^8 \text{ Pa}$ . Le modèle prenant en compte la compressibilité de l'eau est-il suffisant pour prédire la pression à de telles profondeurs ? Proposer une amélioration de ce modèle.

Pour résister à une telle pression, il faut renforcer toutes les structures porteuses et notamment équiper la zone habitable sphérique de parois d'une épaisseur de plus de 5 cm d'acier. Le surpoids lié à cette structure est contrebalancé par un ensemble de plaques de mousse spécialement développées qui assure la flottabilité du sous-marin.

## B Plongée et remontée

L'économie d'énergie est également critique. La plongée au fond de la fosse, ainsi que la remontée en surface, sont essentiellement assurées par les forces gravitaires. C'est donc un ensemble de masses attachées à la coque du sous-marin, appelées ballast qui permettent la plongée. Leur abandon au fond de la fosse en fin d'expédition déclenche la remontée du sous-marin. Ainsi, l'usage des propulseurs, alimentés par un circuit électrique, peut être réservé à l'exploration locale de la fosse. Le déplacement d'un solide dans un fluide visqueux s'accompagne généralement d'une force dite de traînée qui dépend notamment de la forme du solide et du régime d'écoulement. La norme de cette force, opposée au mouvement, peut s'écrire sous la forme :

$$F = C_x \frac{1}{2} \rho v^2 S$$

où  $v$  est la vitesse du solide,  $S$  sa surface frontale,  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $C_x$  un coefficient empirique sans dimension voisin de 1 qui dépend de la géométrie. Les relevés effectués lors de la première expédition montrent que la descente du sous-marin, à vitesse quasi constante, a duré environ 2 h30 min et a permis d'atteindre une profondeur de 10,9 km. Le même trajet n'a pris que 70 min lors du retour à la surface.

**B.1** En explicitant clairement votre démarche ainsi que les hypothèses que vous serez amené à formuler, évaluer la masse de ballast qui a été libéré pour permettre la remontée du sous-marin.

## C Risque d'hypoxie

La puissance électrique disponible assure, entre autres, le fonctionnement du système de contrôle de l'atmosphère de la capsule pendant plus de 50 heures. Ce système permet de maintenir une composition de l'air intérieur de l'habitacle correspondant à celle de l'atmosphère terrestre au niveau de la mer. On s'intéresse à la durée de survie du pilote au fond de l'océan en cas de panne de ce système. Le dimensionnement des systèmes de survie en cas d'incidents divers s'appuie sur les données physiologiques moyennes d'un adulte :

- pression partielle en dioxygène pour que l'air soit respirable  $P_{O_2} > P_{O_{2\ell}} = 8,0 \times 10^3$  Pa ;
- volume moyen d'air inspiré au repos  $V_p = 0,50$  L ;
- fréquence respiratoire au repos  $f = 0,25$  Hz.

On considère que, lors d'une inspiration, un être humain inspire toujours le même volume  $V_p$  d'air dont la composition est celle de l'air ambiant dans lequel il se trouve. L'étude d'un cycle respiratoire montre que seul un quart du dioxygène inspiré est effectivement consommé par les poumons. On admettra que la quantité de matière de dioxyde de carbone exhalée est égale à la quantité de matière de dioxygène consommée par les poumons.

**C.1** Quelle est la composition moyenne de l'air présent dans l'atmosphère terrestre au niveau de la mer ?

On suppose que le système de contrôle de l'atmosphère cesse de fonctionner et on note  $n_i$  et  $P_{O_{2i}}$  respectivement la quantité de matière de dioxygène présente dans l'habitacle et la pression partielle en dioxygène après la  $i$ -ème respiration après l'arrêt de ce système.

**C.2** En explicitant les hypothèses utilisées, établir la relation :

$$n_{i+1} = n_i \left( 1 - \frac{V_p}{4V} \right)$$

où  $V$  est le volume libre dans l'habitacle. En déduire une relation entre  $P_{O_{2i}}$ ,  $P_{O_{20}}$ ,  $V_p$ ,  $V$  et  $i$ .

**C.3** En déduire le nombre d'inspirations que peut faire le pilote, puis sa durée de vie sans apport extérieur de dioxygène (Question ouverte qui nécessite de présenter la démarche suivie).