CLASSES DE PCSI 3 – Corrigé du D.S N° 7 DE PHYSIQUE
Sujet A

Problème 1: Principe de la séparation isotopique par effusion gazeuse

1) Vitesse quadratique moyenne d'une molécule de masse molaire M à la température T : $u = \sqrt{\frac{3.R.T}{M}}$.
D'après la définition de la température cinétique à partir de l'énergie cinétique moyenne de translation : $<E_c>=3/2k_BT$.
2) Le nombre $dN_{1\to2}$ de molécules du compartiment (1) traversant la surface S vers le compartiment (2) pendant une durée dt est : $dN_{1\to2} = \frac{1}{6}\frac{N_1(t)}{V}u.S.dt$. De la même manière, on peut dire que le nombre $dN_{2\to1}$ de molécules du compartiment (2) traversant la surface S vers le compartiment (1) pendant la même durée dt est : $dN_{2\to1} = \frac{1}{6}\frac{N_2(t)}{V}u.S.dt$. Soit :

$$\frac{dN_{1\to2}}{dt} = \frac{1}{6}\frac{N_1(t)}{V}u.S$$

$$\frac{dN_{2\to1}}{dt} = \frac{1}{6}\frac{N_2(t)}{V}u.S$$

3) Soit $\frac{dN_1}{dt}$ la variation du nombre de molécules dans le compartiment (1) par unité de temps :

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_{2\to1}}{dt} - \frac{dN_{1\to2}}{dt}$$

En explicitant :

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{1}{6}\frac{N_2(t)}{V}u.S - \frac{1}{6}\frac{N_1(t)}{V}u.S$$

Sachant qu'à l'origine des temps le compartiment (1) contient N molécules d'un gaz parfait alors que le compartiment (2) est vide : $N_1(t) + N_2(t) = N$, on établit l'équation différentielle :

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{S.u}{3.V}N_1 = \frac{S.u}{6.V}N$$

4) Posons $\tau = \frac{3.V}{S.u}$ temps caractéristique du phénomène d'effusion, la solution de cette équation différentielle est du type : $N_1(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{N}{2}$ Sachant qu'à l'origine des temps : $N_1(0) = N$ et que $N_1(t) + N_2(t) = N$ on établit que :

$$N_1(t) = \frac{N}{2}.\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$
$$N_2(t) = \frac{N}{2}.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

On vérifie que $N_1(t)$ et $N_2(t)$ satisfont les conditions initiales et que pour $t \gg \tau$: $N_1(t) = N_2(t) = \frac{N}{2}$
5) A.N. : Avec $u = \sqrt{\frac{3.R.T}{M}} = 169\ m.s^{-1}$ et $S = \pi.r^2 = 3{,}14.10^{-16}\ m^2$, $\tau = \frac{3.V}{S.u} = 1{,}81.10^{12}\ s$. On constate que τ est très grand (mais il est relatif à un pore….).
6) Par définition, le nombre de particules qui traversent S par unité de temps (de (1) vers (2) et de (2) vers (1)) est :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_{1\to2}}{dt} + \frac{dN_{2\to1}}{dt}$$

En explicitant :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{6}\frac{N_1(t)}{V}u.S + \frac{1}{6}\frac{N_2(t)}{V}u.S = \frac{1}{6}\frac{N}{V}u.S = \frac{1}{6}n^*.u.S.dt$$

avec $N_1(t) + N_2(t) = N$ et $n^* = \frac{N}{V}$
Pendant un intervalle de temps $\Delta t = 1\ s$, le flux de particules est donc :

$$\phi = \frac{1}{6} n^*.S.\sqrt{\frac{3.R.T}{M}} \quad \text{avec } u = \sqrt{\frac{3.R.T}{M}}$$

7) Rapport des temps d'effusion :

$\frac{\tau_8}{\tau_5} = \sqrt{\frac{M_8}{M_5}} = 1{,}004$ (4CS pour différencier)

8) Compte tenu du fait que $\tau_8 > \tau_5$ si on place un mélange de $U^{235}F_6$ et $U^{238}F_6$ dans (1), on récupère un mélange enrichi en $U^{235}F_6$ dans (2) après un temps de l'ordre de quelques τ.

9) En explicitant ϕ_5 et ϕ_8 on établit que :

$$R_d = \frac{\phi_5}{\phi_8} = \frac{{n_5}^*}{{n_8}^*}\sqrt{\frac{M_8}{M_5}}$$

Sachant que $R_0 = \frac{{n_5}^*}{{n_8}^*}$ et $\eta_e = \frac{R_d}{R_0}$:

$\eta_e = \sqrt{\frac{M_8}{M_5}} = \frac{\tau_8}{\tau_5} = 1{,}004$ (4CS pour différencier)

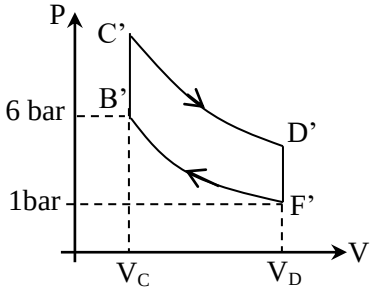
10) Posons : $0{,}71.10^{-2}.(\eta_e)^p = 0{,}04$:

$$p = \frac{ln\left(\frac{4}{0{,}71}\right)}{ln(\eta_e)} = 404$$

Problème 2: Détermination de la consommation d'essence d'un scooter

On répondra aux questions dans cet exercice avec 3 CS au vu des applications numériques proposées dans l'énoncé.

1. cycle compose de deux isochores (verticales) et de deux adiabatiques réversibles (PV^γ=cste)



2. Un tour de vilebrequin correspond à un cycle. En une minute (60s) sont décrits 7000 cycles.

La durée d'un cycle est donc : T = $\frac{60}{7000}$ soit $\boxed{\text{T = 8,57 ms}}$.

3. La loi de Laplace PV^γ = constante s'applique à un gaz parfait (dont on peut considérer le rapport C_p/C_v comme constant) en évolution adiabatique réversible.

D'après le second principe : $dS = \delta S_{ech} + \delta S_{créée}$

Si la transformation est adiabatique : $\delta S_{ech} = \frac{\delta Q}{T_{Sext}} = 0$

Si elle est réversible : $\delta S_{créée} = 0$

$\Big\}$ dS = 0 $\Rightarrow$ S = cste : transformation isentropique

La nature du système (gaz, solide ou liquide) n'intervient pas dans le raisonnement.

4. La compression F'B' est adiabatique réversible donc : $P_F V_D^{\gamma} = P_B V_C^{\gamma} P_{F'}$ soit

$$a = \frac{V_D}{V_C} = \left(\frac{P_B}{P_F}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

d'où : $\boxed{a = 3{,}60}$.

5. Les transformations B'C' et D'F' sont isochores donc $W_{B'C'} = W_{D'F'} = 0$.

Le travail algébriquement reçu par le mélange sur un cycle s'écrit donc $W_{reçu} = W_{F'C'} + W_{C'D'}$

Les transformations F'B' et C'D' étant adiabatiques : $\Delta U_{F'B'} = W_{F'B'}$ et $\Delta U_{C'D'} = W_{C'D'}$

D'où : $W_{reçu} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_F) + \frac{nR}{\gamma - 1}(T_D - T_C)$ avec $n = \frac{P_F V_D}{RT_F}$ soit

$$\boxed{W_{fourni} = \frac{-P_F V_D}{(\gamma - 1)T_F}(T_B - T_F + T_D - T_C).}$$

6. La chaleur (transfert thermique) libérée pendant la combustion correspond à la chaleur libérée au cours de la phase isochore B'C' donc $Q_{B'C'} = \Delta U_{B'C'}$ soit :

$$\boxed{Q_{B'C'} = \frac{P_F V_D}{(\gamma - 1)T_F}(T_C - T_B).}$$

7. Le rendement correspond à l'énergie utile récupérée sur l'énergie fournie.

donc ici : $\eta = \frac{\text{travail fourni}}{\text{chaleur dégagée par la combustion}} = \frac{W_{fourni}}{Q_{B'C'}}$ soit $\eta = 1 - \frac{(T_D - T_F)}{(T_C - T_B)}$.

Le rendement peut être exprimé en fonction des volumes V_C et V_D en utilisant la loi de Laplace $TV^{\gamma-1}$ = constante sur les transformations adiabatiques réversibles F'B' et C'D' :

$T_F V_D^{\gamma-1} = T_B V_C^{\gamma-1}$ soit $T_F = T_B\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = T_B a^{1-\gamma}$ et $T_D V_D^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$ soit $T_D = T_C\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = T_C a^{1-\gamma}$

On obtient alors : $\boxed{\eta = 1 - a^{1-\gamma}}$.

8. La chaleur (le transfert thermique) libérée à chaque cycle par la combustion est :

$$Q_{B'C'} = \frac{W_{fourni}}{\eta} = \frac{PT}{\eta} \text{ soit } \boxed{Q_{B'C'} = 94{,}3 \text{ J}}.$$

9. Le pouvoir calorifique q correspond à la chaleur libérée par un cm^3 d'essence lors de sa combustion. Lors d'un cycle, le volume de carburant consommé est donc : $V_{1cycle} = \frac{Q_{B'C'}}{q}$.

Sur 100 km, n cycles sont décrits et le volume d'essence consommé est donc : $V = n\frac{Q_{B'C'}}{q}$

Pour faire 100 km à 45 $km.h^{-1}$, il faut 8000 s ce qui correspond à $n = \frac{8000}{8{,}57.10^{-3}} = 933489$ cycles.

Le scooter consomme donc V = 2,93 L d'essence lorsqu'il parcourt 100 km. Cette valeur concorde avec la consommation d'un tel engin.

10. La boucle IB'C'D'I est décrite dans le sens horaire : il y a un travail utile produit par le mélange sur cette partie du cycle.

La boucle IEE'F'GI est par contre décrite en sens antihoraire, le mélange reçoit du travail sur cette partie du cycle.

Ce travail vient en déduction du travail précédent. Le rendement s'en trouve donc diminué et la consommation d'essence augmentée.

11. Un cycle de diagramme de Watt, pour un moteur 2 temps ou 4 temps fournit le même travail.

Si les 2 moteurs tournent à la même vitesse, le cycle nécessitant 1 seule rotation du vilebrequin pour le 2 temps, contre 2 rotations pour le 4 temps, il y 2 fois plus de cycles décrits avec le 2 temps qui produit donc 2 fois plus de travail.

Problème 3: Calorimétrie (pb extrait ENAC)

1) Appliquons le premier principe au système $\{bille + eau\}$ isolé : $\Delta E_{tot} = \Delta U = 0$. En posant $\Delta U = \Delta U_b + \Delta U_e = 0$, et en explicitant : $m_b.c_b.(T_f - T_b) + m_e.c_e.(T_f - T_e) = 0$ soit :

$$T_f = \frac{m_b.c_b.T_b + m_e.c_e.T_e}{m_b.c_b + m_e.c_e}$$

AN : $T_f = 286\ K$

Solutions A et C (à 5% d'erreur relative près).

2) Cf cours : **solutions B et C**.

3) Le transfert thermique reçu par la bille est donné par : $Q_b = m_b.c_b.(T_f - T_b)$; **solution B**.

4) Le transfert thermique reçu par l'eau est donné par : $Q_e = m_e.c_e.(T_f - T_e)$; **solution D**.

5) L'entropie est une grandeur extensive donc : $\Delta S = \Delta S_b + \Delta S_e$; **solution B**.

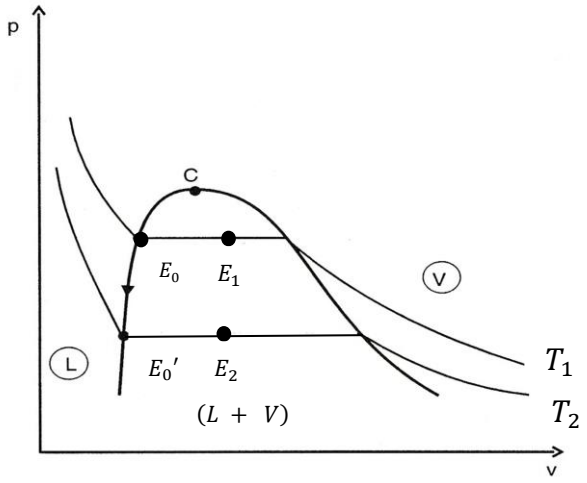
6) Le système $\{bille + eau\}$ est isolé donc $S^r = 0$et $S^c = \Delta S$. En explicitant $\Delta S = \Delta S_b + \Delta S_e$ pour des phases condensées :

$$S^c = m_b.c_b.\ln\left(\frac{T_f}{T_b}\right) + m_e.c_e.\ln\left(\frac{T_f}{T_e}\right)$$

Solutions : A et B

Problème 4 : Vaporisation partielle de l'eau…

1) Allure de l'isotherme T_1 dans le diagramme (P, v) :



A l'état liquide, le corps pur est moins compressible qu'à l'état gazeux donc, en valeur absolue, la pente $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ est plus grand dans (L) que dans (V). A l'état diphasé $(L+V)$ le corps pur est monovariant, c.à.d. qu'à T constant la pression (appelée pression de vapeur saturante) est constante.

2) A l'équilibre, le système est diphasé donc la pression partielle de l'eau est égale à la pression de vapeur saturante :

$$P_e(T) = P_{sat}(T)$$

Le taux hygrométrique : $\tau = 1{,}00$

3) En appliquant l'équation d'état des gaz parfaits aux n_{v1} moles d'eau gazeuses dans l'état E_1 :

$$P_{sat}(T_1).V = n_{v1}.R.T_1$$

En négligeant le volume de l'eau liquide devant le volume V du récipient. Soit :

$$n_{v1} = \frac{P_{sat}(T_1).V}{R.T_1}$$

A.N. : $n_{v1} = \frac{1{,}013.10^5.10{,}0.10^{-3}}{8{,}31.373} = 0{,}327$ moles

La masse d'eau à l'état gazeux est : $m_{v1} = n_{v1}.M = 5{,}88\ g$ et le titre massique $x_1 = \frac{m_{v1}}{m} = 0{,}588 = 58{,}8\ \%$.

4) Nous savons que : $l_{vap}(T) = h_V(T) - h_L(T)$. A.N. : $l_{vap}(T_1) = 2671{,}44 - 418{,}42 = 2253{,}02\ kJ.kg^{-1}$

5) Par définition : $\Delta H_{0\to1} = m.\Delta h_{0\to1}$ avec $\Delta h_{0\to1} = (x_1 - x_0).l_{vap}(T_1)$. Sachant que $x_0 = 0$:

$$\Delta H_{0\to1} = m.x_1.l_{vap}(T_1)$$

A.N. : $\Delta H_{0\to1} = 10{,}0.10^{-3}.0{,}588.2253{,}02 = 13{,}3\ kJ$

Sachant que : $H = U + p.V$

$$\Delta H_{0\to1} = \Delta U_{0\to1} + \Delta_{0\to1}(p.V) = \Delta U_{0\to1} + p_1.V_1 - p_0.V_0$$

Avec $p_0 = p_1 = P_{sat}(T_1)$ et $V_1 = V \gg V_0$:

$$\Delta H_{0\to1} = \Delta U_{0\to1} + P_{sat}(T_1).V$$

$$\Delta U_{0\to1} = \Delta H_{0\to1} - P_{sat}(T_1).V$$

En explicitant $\Delta H_{0\to1}$:

$$\Delta U_{0\to1} = m.x_1.l_{vap}(T_1) - P_{sat}(T_1).V$$

A.N. : $\Delta U_{0\to1} = 13{,}3.10^3 - 1{,}013.10^5.10{,}0.10^{-3} = 12{,}3\ kJ$

Le transfert thermique $Q_{0\to1}$ est donné par le premier principe de la thermodynamique appliqué à la masse m d'eau liquide qui subit une vaporisation partielle dans le vide, au contact thermique d'un thermostat de température T_1 :

$$\Delta E_{tot\,0\to1} = \Delta E_{m,M\,0\to1} + \Delta U_{0\to1} = w_{0\to1} + Q_{0\to1}$$

En négligeant la variation d'énergie mécanique, compte tenu du fait que la vaporisation s'effectue dans le vide $w_{0\to1} = 0$:

$$\Delta U_{0\to1} = Q_{0\to1}$$

6) Variation d'entropie de l'eau entre l'état initial E_0 à l'état final E_1 :

$$\Delta S_{0\to1} = \frac{\Delta H_{0\to1}}{T_1} = \frac{m.x_1.l_{vap}(T_1)}{T_1}$$

A.N. : $\Delta S_{0\to1} = 35{,}7\ \mathrm{J.K^{-1}}$

Entropie échangée entre l'état initial E_0 à l'état final E_1 :

$$S_{0\to1}{}^e = \frac{Q_{0\to1}}{T_1} = \frac{m.x_1.l_{vap}(T_1) - P_{sat}(T_1).V}{T_1}$$

A.N. : $S_{0\to1}{}^e = 33{,}0\ \mathrm{J.K^{-1}}$

7) Sachant que : $\Delta S_{0\to1} = \Delta S_{0\to1} + S_{0\to1}{}^c$

$$S_{0\to1}{}^c = \Delta S_{0\to1} - S_{0\to1}{}^e = \frac{P_{sat}(T_1).V}{T_1} = 2{,}7\ \mathrm{J.K^{-1}}$$

On vérifie que $S_{0\to1}{}^c > 0$ ce qui est en accord avec le caractère irréversible de l'évolution.

8) Dans l'état E_0 l'eau est liquide à la température T_1 donc : $s_0 = s_L(T_1)$. Dans l'état E_1 l'eau est diphasée à la température T_1 donc :

$$s_1 = (1 - x_1).s_L(T_1) + x_1.s_V(T_1)$$

La variation d'entropie massique de l'état E_0 à l'état E_1 est donnée par :

$$\Delta s_{0\to1} = s_1 - s_0 = (1 - x_1).s_L(T_1) + x_1.s_V(T_1) - s_L(T_1)$$

On vérifie que :

$$\Delta s_{0\to1} = x_1.\left(s_V(T_1) - s_L(T_1)\right)$$

A.N. : $\Delta s_{0\to1} = 0{,}588.(7{,}355 - 1{,}307) = 3{,}56\ \text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $\Delta S_{0\to1} = m.\Delta s_{0\to1} = 35{,}6\ \text{J.K}^{-1}$
On vérifie que ce résultat est très proche de celui établit à la question 6) (écart relatif de 0,3 %).
9) Soit $\Delta s_{1\to2}$ la variation d'entropie massique de l'eau entre l'état initial E_1 et l'état final E_2. L'entropie étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial E_1 et de l'état final E_2. On peut donc décomposer la détente en trois étapes :

- Une première étape au cours de laquelle le corps pur subit une liquéfaction isotherme à T_1 de E_1 vers E_0 :

$$\Delta s_{1\to0} = \frac{\Delta h_{1\to0}}{T_1} = \frac{(x_0 - x_1).l_{vap}(T_1)}{T_1} = -\frac{x_1.l_{vap}(T_1)}{T_1}$$

- Une deuxième étape au cours de laquelle l'eau liquide est refroidie de T_1 à T_2 au cours de l'évolution de E_0 à $E_0{}'$ dans le diagramme (p, v) :

$$\Delta s_{0\to0'} = c_L.ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

- Une troisième étape au cours de laquelle l'eau liquide subit une vaporisation partielle à température constante T_2 de $E_0{}'$ à l'état final E_2 :

$$\Delta s_{O'\to2} = \frac{\Delta h_{0'\to2}}{T_2} = \frac{(x_2 - x_{0'}).l_{vap}(T_2)}{T_2} = \frac{x_2.l_{vap}(T_2)}{T_2}$$

Avec $x_{0'} = 0$.
Sachant que l'évolution de l'état initial E_1 à l'état final E_2 est isentropique : $\Delta s_{1\to2} = 0$:

$$\Delta s_{1\to2} = \Delta s_{1\to0} + \Delta s_{0\to0'} + \Delta s_{O'\to2} = 0$$

En explicitant :

$$-\frac{x_1.l_{vap}(T_1)}{T_1} + c_L.ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{x_2.l_{vap}(T_2)}{T_2} = 0$$

On établit que :

$$x_2 = \frac{T_2}{l_{vap}(T_2)}\left(\frac{x_1.l_{vap}(T_1)}{T_1} - c_L.ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right)$$

A.N. : A partir du tableau 1, on détermine $l_{vap}(T_2)$:

$$l_{vap}(T_2) = h_V(T_2) - h_L(T_2) = 2587{,}42 - 208{,}96 = 2378{,}46\ \text{kJ.kg}^{-1}$$

$$x_2 = \frac{323}{2378{,}46}\left(\frac{0{,}588}{373}(2253{,}02) - 4{,}20.ln\left(\frac{323}{373}\right)\right) = 0{,}564 = 56{,}4\ \%$$