

Durée de l'épreuve : 4h

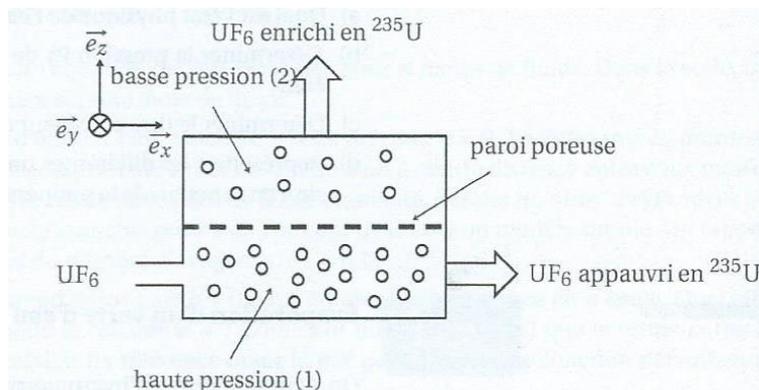
Les 4 problèmes sont indépendants

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation **des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème 1: Principe de la séparation isotopique par effusion gazeuse

75 % de l'énergie électrique consommée en France provient de réacteurs nucléaires dont 90 % utilisent comme combustible l'oxyde d'uranium UO_2 dont la teneur en uranium 235 doit atteindre un seuil de 4 %. En proportion insuffisante dans l'uranium naturel, il convient d'enrichir cet uranium en isotope 235. L'enrichissement par effusion gazeuse est le premier procédé industriel de séparation isotopique. Ce procédé met à profit la faible différence de masse des isotopes de l'hexafluorure d'uranium UF_6 pour séparer sélectivement les molécules par passage au travers d'une paroi poreuse.

Le diffuseur est constitué de deux compartiments de même volume V maintenus à la température T . Le compartiment (1) contient N molécules d'un gaz parfait alors que le compartiment (2) est vide. A l'instant initial, un très petit orifice de surface S est percé entre les deux compartiments permettant ainsi le passage du gaz entre les compartiments (1) et (2) : c'est le phénomène d'effusion gazeuse.



L'espace est rapporté au trièdre direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z normal au trou orienté vers le compartiment (2). On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre de molécules dans les compartiments (1) et (2) à l'instant t . On adopte le modèle simplifié suivant : le trou est petit, le gaz se détend lentement en restant au repos donc tout mouvement macroscopique est négligé, la répartition des molécules est uniforme dans les deux compartiments, les vitesses des molécules ne sont orientées que selon $\pm \vec{e}_x$, $\pm \vec{e}_y$ et $\pm \vec{e}_z$ avec une norme identique égale à la vitesse quadratique moyenne notée u (ou v^*).

1) On note $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz. Donner l'expression de la vitesse quadratique moyenne u en fonction de M , R et T .

2) On fait l'hypothèse que la distribution des vitesses est isotrope et que seule $\frac{1}{6}$ des molécules se dirige selon $+\vec{e}_z$ avec une vitesse $v_z = u > 0$. Exprimer le nombre $dN_{1 \rightarrow 2}$ de molécules du compartiment (1) traversant la surface S vers le compartiment (2) pendant une durée dt . Exprimer le nombre $dN_{2 \rightarrow 1}$ de molécules du compartiment (2) traversant la surface S vers le compartiment (1) pendant la même durée dt . En déduire $\frac{dN_{1 \rightarrow 2}}{dt}$ et $\frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dt}$ en fonction de $N_1(t)$, $N_2(t)$, S , u et V .

3) Etablir que l'équation différentielle vérifiée par $N_1(t)$ s'écrit : $\frac{dN_1}{dt} + \frac{S \cdot u}{3 \cdot V} N_1 = \frac{S \cdot u}{6 \cdot V} N$

4) Etablir les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en fonction du nombre N de molécules et d'une constante de temps τ caractéristique du phénomène d'effusion observé.

5) Calculer τ sachant que l'effusion s'effectue à 403 K à travers un pore cylindrique de rayon $r = 0,010 \mu\text{m}$ et que chaque compartiment possède un volume $V = 32,0 \text{ L}$. Le gaz utilisé a pour masse molaire $M = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Conclure.

- 6) On note ϕ le nombre de particules traversant l'orifice de surface S en une seconde et $n^* = \frac{N}{V}$ la densité moléculaire. Montrer que $\phi = \frac{n^* \cdot S}{6} \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}}$.
- 7) A l'instant initial, le compartiment (1) contient deux gaz $U^{235}F_6$ et $U^{238}F_6$ de masses molaires M_5 et M_8 et de densité moléculaires n_5^* et n_8^* . Dans la suite, les grandeurs associées à ces deux gaz seront indiquées respectivement par 5 et 8. On donne $M_5 = 349 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_8 = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Calculer le rapport des temps d'effusion $\frac{\tau_8}{\tau_5}$.
- 8) Commenter ce résultat en expliquant brièvement comment il est possible d'enrichir en $U^{235}F_6$ un mélange de $U^{235}F_6$ et $U^{238}F_6$ par effusion gazeuse.
- 9) Le taux d'enrichissement η_e en isotope 235 se définit comme le rapport des coefficients de richesse dans le gaz diffusé $R_d = \frac{\phi_5}{\phi_8}$ et dans le gaz initial $R_0 = \frac{n_5^*}{n_8^*}$. Exprimer ce rapport $\eta_e = \frac{R_d}{R_0}$ en fonction de M_5 et de M_8 . Calculer η_e .
- 10) Une cascade est réalisée en plaçant p étages d'enrichissement en série, le gaz enrichi de l'étage k alimentant l'entrée de l'étage $k + 1$. Déterminer le nombre p de passages nécessaires à travers les parois poreuses pour arriver à la proportion finale de 4,0 % en isotope 235 partant d'un titre initial de 0,71 %. On supposera que η_e est le taux d'enrichissement de chaque étage.

Problème 2 : Moteur à deux temps...

Les scooters de cylindrée inférieure à 50 cm^3 sont équipés d'un moteur à explosion à deux temps. Celui-ci existe sous plusieurs formes. Le type le plus répandu (surtout dans le domaine des petites puissances) est celui qui comporte trois lumières ; celles-ci sont destinées à assurer l'aspiration, l'échappement et la communication entre le carter et le cylindre. Le mélange carburé (air - essence - huile) provenant du carburateur pénètre dans le carter pendant le mouvement du piston du P.M.B (point mort bas) au P.M.H (point mort haut). Au cours de la descente, cet air est comprimé et dirigé vers le cylindre par le canal de transfert. La légère compression du mélange carburé permet l'évacuation du gaz de combustion. Le graissage des parties mobiles, assuré par de l'huile que l'on mélange à l'essence, permet de réduire les frottements.

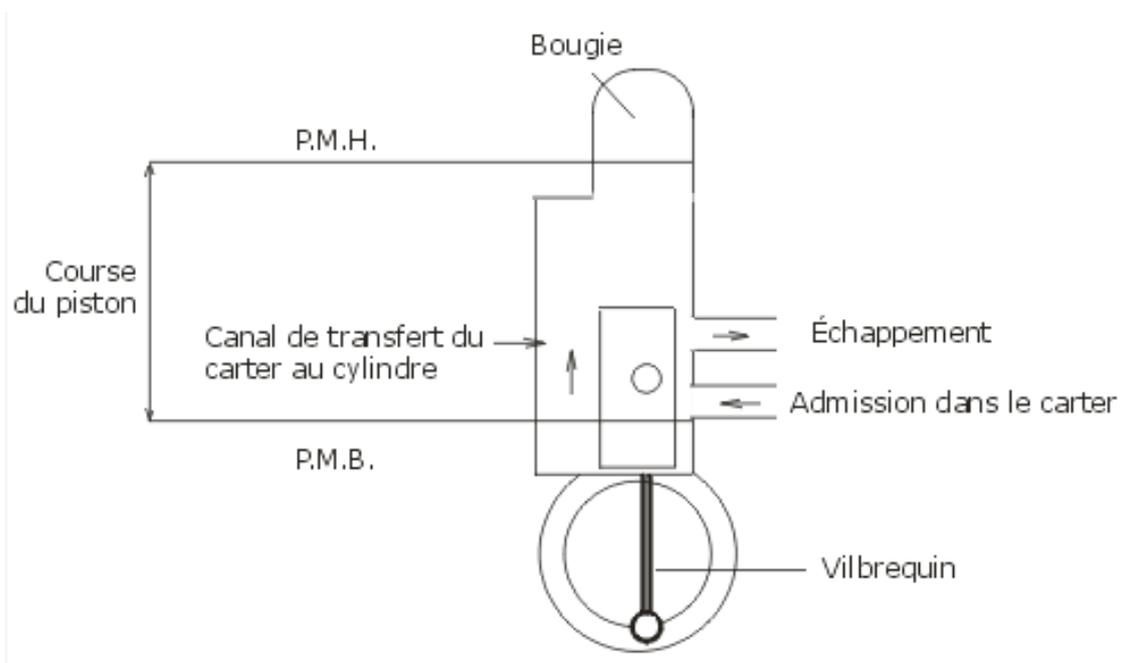


Figure 1

PRINCIPE GÉNÉRAL :

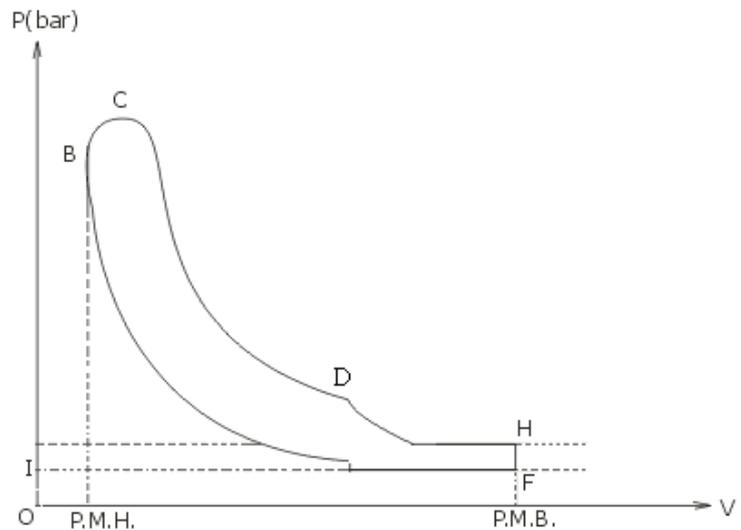
Il est rappelé que les quatre phases (admission, compression, combustion et détente), qui sont réparties sur deux tours du vilebrequin dans un quatre temps (deux allers et deux retours du piston) se succèdent

dans un deux temps sur un seul tour du vilebrequin (un aller et un retour du piston). Cela est possible parce que les phases échappement et admission ont lieu très rapidement et sensiblement au moment où le piston se trouve au point mort bas (P.M.B).

Pratiquement le diagramme de Watt (pression en ordonnée, volume en abscisse) a l'allure représentée sur la **figure 2**. On y distingue les deux temps :

- 1^{er} temps : compression du mélange carburé (FB), combustion (BC).
- 2^{ème} temps : détente (CD), échappement des gaz de combustion et admission d'une nouvelle charge de mélange carburé (DHF).

Figure 2
DIAGRAMME PRATIQUE DU
MOTEUR À DEUX TEMPS



Le diagramme théorique (B'C'D'F') s'identifie au cycle de Beau de Rochas. Il est établi avec les hypothèses suivantes :

- la combustion (B'C') est instantanée et se produit lorsque le volume du cylindre vaut V_C (piston au PMH).
- la détente (C'D') et la compression (F'B') du mélange sont adiabatiques réversibles.
- lors de l'échappement et de l'admission (D'F') quasi instantanées, le volume du cylindre est considéré constant égal à V_D .

La cylindrée du moteur est $V_D - V_C$.

Le taux de compression est égal au rapport volumétrique $a = \frac{V_D}{V_C}$.

Dans la notice technique d'un scooter (Spacer 50 Kymco), on lit les indications suivantes :

- vitesse maximale : 45 km.h⁻¹
- régime de puissance maximale : 7000 tours.min⁻¹ (vitesse angulaire de vilebrequin)
- puissance maximale : 4,40 kW
- cylindrée : 49,5 cm³
- course du piston : 39,2 mm (distance entre le point mort haut et le point mort bas)

On donne :

- la constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- la température et la pression du point F' : $T_F = 300\text{K}$, $P_F = 1,0 \text{ bar}$

On fera d'autre part l'approximation suivante : l'air étant en grand excès par rapport au mélange (huile + carburant), on assimilera le mélange carburé à un gaz parfait unique, de coefficient $\gamma = 1,4$ ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$)

rapport de capacités thermiques molaires à pression constante et à volume constant), de masse molaire 29 g.mol^{-1} .

On rappelle que le pouvoir calorifique, noté q , supposé indépendant de la température, est l'énergie thermique libérée par la combustion d'un cm^3 d'essence. On prendra $q = 30 \text{ kJ.cm}^{-3}$.

1. Tracer l'allure du cycle ($F'B'C'D'F'$) dans un diagramme de Watt (P, V).
2. Lorsque le scooter roule à 45 km.h^{-1} à son régime maximal de $7000 \text{ tours.min}^{-1}$, quelle est la durée d'un cycle ?
3. Rappeler pour quel type de système et pour quel type de transformation, la loi de Laplace $PV^\gamma = \text{constante}$ est applicable.
Pourquoi dit-on qu'une transformation adiabatique réversible est isentropique ?
Est-ce que cela dépend de la nature du système ?
4. La pression en fin de compression est de 6.10^5 Pa . En déduire le taux de compression $a = \frac{V_D}{V_C}$.
5. Exprimer le travail fourni par le moteur au cours d'un cycle en fonction de γ, P_F, V_D et des températures T_F, T_B, T_C, T_D des points F', B', C', D' .

On rappelle que pour un gaz parfait la capacité thermique molaire à volume constant est : $C_V = \frac{R}{\gamma-1}$

6. Exprimer l'énergie thermique libérée par la combustion en fonction de $\gamma, P_F, V_D, T_C, T_B, T_F$.
7. Définir le rendement thermodynamique η du cycle et l'exprimer en fonction de a et γ .
8. En prenant $\eta = 0,4$, calculer l'énergie thermique libérée par la combustion à chaque cycle lorsque le scooter roule à 45 km.h^{-1} à son régime de puissance maximale $P = 4,4 \text{ kW}$.
9. Quelle est la consommation d'essence pour parcourir 100 km ? Que pensez-vous de la valeur trouvée ?
10. Un modèle un peu plus précis détaille la phase d'admission et d'échappement, comme cela est représenté sur le diagramme de la **figure 3**.

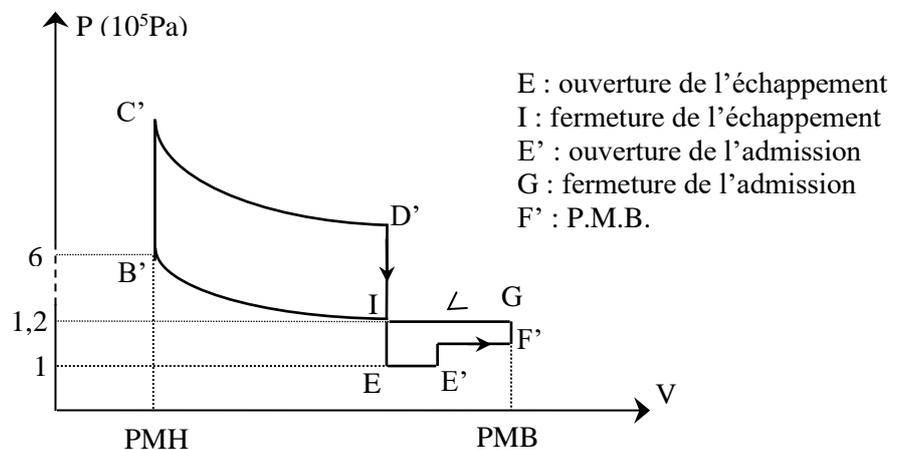


Figure 3

Quelle est la conséquence pour le travail effectivement fourni par le moteur sur un cycle et pour la consommation ?

11. Pourquoi peut-on dire qu'a priori un moteur deux temps, de même cylindrée et de même régime est deux fois plus puissant qu'un moteur à quatre temps ?

Problème 3 : Calorimétrie (pb extrait ENAC)

Dans ce problème, toutes les réponses devront être justifiées.

On introduit une bille de plomb de masse $m_b = 300 \text{ g}$ et de température $T_b = 400 \text{ K}$ dans deux décilitres d'eau à température $T_e = 280 \text{ K}$. L'ensemble $\{\text{bille} + \text{eau}\}$ forme un système isolé. On donne les capacités thermiques massiques de l'eau et du plomb, respectivement $c_e = 4\,200 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $c_b = 150 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$. On admet qu'elles sont indépendantes de la température.

1) Déterminer puis calculer (à 5% d'erreur relative près) la température finale T_f d'équilibre. Dans les expressions proposées, m_e est la masse d'eau.

$$\text{A) } T_f = \frac{m_b \cdot c_b \cdot T_b + m_e \cdot c_e \cdot T_e}{m_b \cdot c_b + m_e \cdot c_e}$$

$$\text{C) } T_f = 280 \text{ K}$$

$$\text{B) } T_f = \frac{m_b \cdot c_b \cdot T_b - m_e \cdot c_e \cdot T_e}{m_b \cdot c_b - m_e \cdot c_e}$$

$$\text{D) } T_f = 380 \text{ K}$$

2) Signaler les affirmations fausses :

A) L'entropie est une grandeur extensive qui se mesure, dans le système international des unités, en joule par kelvin.

B) L'entropie n'est pas une fonction d'état.

C) Le deuxième principe de la thermodynamique est un principe qui ne permet pas de connaître le sens d'évolution des phénomènes physiques.

D) L'entropie reçue par un système dépend de la chaleur qu'il reçoit.

3) Exprimer la chaleur reçue Q_b par la bille seule au cours de la transformation qui l'amène de la température T_b à la température T_f .

$$\text{A) } Q_b = 0$$

$$\text{C) } Q_b = m_b \cdot c_b \cdot \left(\frac{T_b}{T_f}\right)$$

$$\text{B) } Q_b = m_b \cdot c_b \cdot (T_f - T_b)$$

$$\text{D) } Q_b = m_b \cdot c_b \cdot (T_b - T_f)$$

4) Exprimer la chaleur reçue Q_e par l'eau seule au cours de la transformation qui l'amène de la température T_e à la température T_f .

$$\text{A) } Q_e = 0$$

$$\text{C) } Q_e = m_e \cdot c_e \cdot (T_e - T_f)$$

$$\text{B) } Q_e = m_e \cdot c_e \cdot \left(\frac{T_e}{T_f}\right)$$

$$\text{D) } Q_e = m_e \cdot c_e \cdot (T_f - T_e)$$

5) Entre l'état initial du système formé par la bille (température T_b) et l'eau (température T_e) et l'état final du système $\{\text{bille} + \text{eau}\}$ de température T_f , on note ΔS_b et ΔS_e la variation d'entropie de la bille seule et de l'eau seule respectivement. Comment s'écrit la variation d'entropie ΔS du système $\{\text{bille} + \text{eau}\}$?

$$\text{A) } \Delta S = 0$$

$$\text{C) } \Delta S = -(\Delta S_b + \Delta S_e)$$

$$\text{B) } \Delta S = \Delta S_b + \Delta S_e$$

$$\text{D) } \Delta S = \Delta S_b - \Delta S_e$$

6) Que valent l'entropie reçue S^r (appelée également entropie échangée S^e) par le système $\{\text{bille} + \text{eau}\}$ et l'entropie créée S^c lors de cette transformation ? Pour information, on donne $\Delta S_b = m_b \cdot c_b \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_b}\right)$ et $\Delta S_e = m_e \cdot c_e \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_e}\right)$.

$$\text{A) } S^r = 0$$

$$\text{C) } S^r = \Delta S$$

$$\text{B) } S^c = m_b \cdot c_b \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_b}\right) + m_e \cdot c_e \cdot \ln\left(\frac{T_f}{T_e}\right)$$

$$\text{D) } S^c = m_b \cdot c_b \cdot \ln\left(\frac{T_b}{T_f}\right) + m_e \cdot c_e \cdot \ln\left(\frac{T_e}{T_f}\right)$$

Problème 4 : Vaporisation partielle de l'eau...

On considère l'équilibre l'eau-liquide et sa vapeur. On désigne par P la pression du système liquide-vapeur et v son volume massique. Cet équilibre est caractérisé à différentes températures T par les données suivantes où P_{sat} est la pression de vapeur saturante à la température T , v_L le volume massique du liquide saturant, h_L l'enthalpie massique du liquide saturant, v_V le volume massique de la vapeur saturante et h_V l'enthalpie massique de la vapeur saturante.

Tableau 1

$T(^{\circ}C)$	P_{sat} (bar)	v_L ($m^3 \cdot kg^{-1}$)	h_L ($kJ \cdot kg^{-1}$)	v_V ($m^3 \cdot kg^{-1}$)	h_V ($kJ \cdot kg^{-1}$)
50,0	0,123	$1,01 \cdot 10^{-3}$	208,96	12,04	2587,42
100	1,013	$1,04 \cdot 10^{-3}$	418,42	1,673	2671,44

Soit un cylindre indéformable, muni d'un piston et dont les parois sont en contact avec un thermostat de température $T_1 = 100^{\circ}C$. Initialement le piston est bloqué dans la position définissant un volume $V = 10,0 L$ dans le cylindre. Ce volume est vide (pression nulle). On introduit une masse $m = 10,0 g$ d'eau liquide dans l'état initial E_0 ($T_1 = 100^{\circ}C$; $P_1 = P_{sat}(T_1)$; $V_0 = 10,0 mL$) dans le cylindre. L'eau se vaporise partiellement dans le vide et atteint un état d'équilibre noté E_1 .

1) Représenter l'isotherme T_1 dans le diagramme (P, v) . Indiquer les domaines d'existence de l'eau à l'état liquide, à l'état gazeux et à l'état diphasé. Justifier l'allure de l'isotherme dans les différentes parties. Placer le point E_0 sur le diagramme.

2) On note τ le taux hygrométrique défini par le rapport : $\tau = P_e(T)/P_{sat}(T)$ de la pression partielle de l'eau $P_e(T)$ sur la pression de vapeur saturante $P_{sat}(T)$ à la température T . Sachant qu'à l'équilibre le système est diphasé, que peut-on dire du taux hygrométrique τ et de la pression partielle de l'eau $P_e(T)$?

3) On assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait, calculer le nombre de moles d'eau à l'état gazeux dans l'état E_1 , noté n_{V1} . Calculer le titre massique x_1 en vapeur de l'eau et placer avec précision le point E_1 dans le diagramme (P, v) .

4) Quelle relation existe-t-il entre l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à une température T , notée $l_{vap}(T)$ et les enthalpies massiques du liquide saturant et de la vapeur saturante notées respectivement $h_L(T)$ et $h_V(T)$ à la température T ? A partir du tableau 1, déterminer l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à la température T_1 notées $l_{vap}(T_1)$.

5) On note $\Delta H_{0 \rightarrow 1}$ la variation d'enthalpie et $\Delta U_{0 \rightarrow 1}$ la variation d'énergie interne de l'eau entre l'état initial E_0 à l'état final E_1 . On néglige le volume de l'eau liquide devant le volume du cylindre $V_0 \ll V$. Déterminer $\Delta H_{0 \rightarrow 1}$ et $\Delta U_{0 \rightarrow 1}$. En déduire le transfert thermique $Q_{0 \rightarrow 1}$ échangé entre l'eau et le thermostat. Calculer $\Delta H_{0 \rightarrow 1}$, $\Delta U_{0 \rightarrow 1}$ et $Q_{0 \rightarrow 1}$.

6) On note $\Delta S_{0 \rightarrow 1}$ la variation d'entropie de l'eau et $S_{0 \rightarrow 1}^e$ l'entropie échangée entre l'état initial E_0 à l'état final E_1 . Exprimer $\Delta S_{0 \rightarrow 1}$ et $S_{0 \rightarrow 1}^e$ en fonction de m , x_1 , $l_{vap}(T_1)$, T_1 , $P_{sat}(T_1)$ et de V . Calculer $\Delta S_{0 \rightarrow 1}$ et $S_{0 \rightarrow 1}^e$.

7) L'évolution de E_0 à E_1 est-elle réversible ? Justifier.

On donne les entropies massiques associées à la vapeur saturante et au liquide saturant pour les températures T_1 et T_2 :

Tableau 2

$T(^{\circ}C)$	P_{sat} (bar)	s_L ($kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)	s_V ($kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)
$T_2 = 50,0^{\circ}C$	0,123	0,704	8,076
$T_1 = 100^{\circ}C$	1,013	1,307	7,355

8) Exprimer l'entropie massique de l'eau dans l'état E_0 , notée s_0 en fonction de $s_L(T_1)$. Exprimer l'entropie massique de l'eau dans l'état E_1 , notée s_1 en fonction de x_1 , $s_V(T_1)$ et $s_L(T_1)$. Montrer que la variation d'entropie massique de l'eau entre l'état E_0 et l'état E_1 est donné par :

$$\Delta s_{0 \rightarrow 1} = x_1 \cdot (s_V(T_1) - s_L(T_1))$$

Calculer $\Delta s_{0 \rightarrow 1}$ et $\Delta S_{0 \rightarrow 1}$. Ce résultat vous semble-t-il pertinent ?

9) On fait subir au mélange liquide-vapeur de l'état E_1 , une détente isentropique de la température $T_1 = 100^\circ\text{C}$ à la température $T_2 = 50,0^\circ\text{C}$. On suppose que la capacité thermique massique de l'eau liquide $c_L = 4,20 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ reste constante au cours de cette détente et on admet qu'à la température T_2 , l'eau est dans un état d'équilibre E_2 diphasé dont le titre en vapeur est noté x_2 . En décomposant la transformation de E_1 à E_2 en trois étapes que l'on représentera dans le diagramme (P, v) , exprimer x_2 en fonction des températures T_1 et T_2 , de c_L , de $l_{vap}(T_1)$ et $l_{vap}(T_2)$. A l'aide des données du tableau 1, calculer $l_{vap}(T_2)$ puis x_2 .

Données :

- Entropie massique de l'eau liquide : $s_L = c_L \cdot \ln T + \text{cte}$
- Masse molaire de l'eau $M = 18,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$