

Durée de l'épreuve : 4h

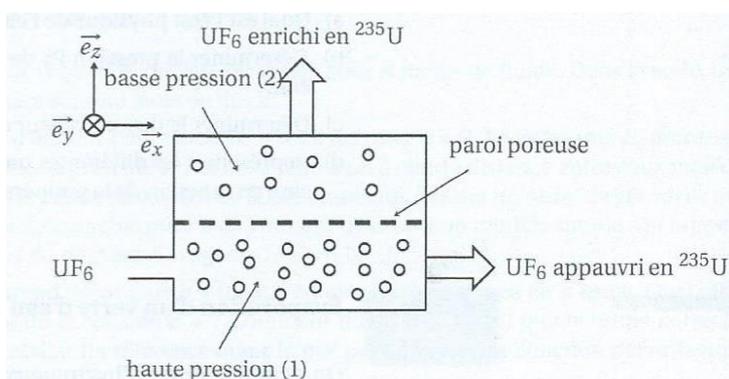
Les 4 problèmes sont indépendants

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation **des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème 1: Principe de la séparation isotopique par effusion gazeuse

75 % de l'énergie électrique consommée en France provient de réacteurs nucléaires dont 90 % utilisent comme combustible l'oxyde d'uranium UO_2 dont la teneur en uranium 235 doit atteindre un seuil de 4 %. En proportion insuffisante dans l'uranium naturel, il convient d'enrichir cet uranium en isotope 235. L'enrichissement par effusion gazeuse est le premier procédé industriel de séparation isotopique. Ce procédé met à profit la faible différence de masse des isotopes de l'hexafluorure d'uranium UF_6 pour séparer sélectivement les molécules par passage au travers d'une paroi poreuse.

Le diffuseur est constitué de deux compartiments de même volume V maintenus à la température T . Le compartiment (1) contient N molécules d'un gaz parfait alors que le compartiment (2) est vide. A l'instant initial, un très petit orifice de surface S est percé entre les deux compartiments permettant ainsi le passage du gaz entre les compartiments (1) et (2) : c'est le phénomène d'effusion gazeuse.



L'espace est rapporté au trièdre direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z normal au trou orienté vers le compartiment (2). On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre de molécules dans les compartiments (1) et (2) à l'instant t . On adopte le modèle simplifié suivant : le trou est petit, le gaz se détend lentement en restant au repos donc tout mouvement macroscopique est négligé, la répartition des molécules est uniforme dans les deux compartiments, les vitesses des molécules ne sont orientées que selon $\pm \vec{e}_x$, $\pm \vec{e}_y$ et $\pm \vec{e}_z$ avec une norme identique égale à la vitesse quadratique moyenne notée u (ou v^*).

1) On note $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz. Donner l'expression de la vitesse quadratique moyenne u en fonction de M , R et T .

2) On fait l'hypothèse que la distribution des vitesses est isotrope et que seule $\frac{1}{6}$ des molécules se dirige selon $+\vec{e}_z$ avec une vitesse $v_z = u > 0$. Exprimer le nombre $dN_{1 \rightarrow 2}$ de molécules du compartiment (1) traversant la surface S vers le compartiment (2) pendant une durée dt . Exprimer le nombre $dN_{2 \rightarrow 1}$ de molécules du compartiment (2) traversant la surface S vers le compartiment (1) pendant la même durée dt . En déduire $\frac{dN_{1 \rightarrow 2}}{dt}$ et $\frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dt}$ en fonction de $N_1(t)$, $N_2(t)$, S , u et V .

3) Etablir que l'équation différentielle vérifiée par $N_1(t)$ s'écrit : $\frac{dN_1}{dt} + \frac{S \cdot u}{3 \cdot V} N_1 = \frac{S \cdot u}{6 \cdot V} N$

4) Etablir les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en fonction du nombre N de molécules et d'une constante de temps τ caractéristique du phénomène d'effusion observé.

5) Calculer τ sachant que l'effusion s'effectue à 403 K à travers un pore cylindrique de rayon $r = 0,010 \mu\text{m}$ et que chaque compartiment possède un volume $V = 32,0 \text{ L}$. Le gaz utilisé a pour masse molaire $M = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Conclure.

- 6) On note ϕ le nombre de particules traversant l'orifice de surface S en une seconde et $n^* = \frac{N}{V}$ la densité moléculaire. Montrer que $\phi = \frac{n^* \cdot S}{6} \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}}$.
- 7) A l'instant initial, le compartiment (1) contient deux gaz $U^{235}F_6$ et $U^{238}F_6$ de masses molaires M_5 et M_8 et de densité moléculaires n_5^* et n_8^* . Dans la suite, les grandeurs associées à ces deux gaz seront indicées respectivement par 5 et 8. On donne $M_5 = 349 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_8 = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Calculer le rapport des temps d'effusion $\frac{\tau_8}{\tau_5}$.
- 8) Commenter ce résultat en expliquant brièvement comment il est possible d'enrichir en $U^{235}F_6$ un mélange de $U^{235}F_6$ et $U^{238}F_6$ par effusion gazeuse.
- 9) Le taux d'enrichissement η_e en isotope 235 se définit comme le rapport des coefficients de richesse dans le gaz diffusé $R_d = \frac{\phi_5}{\phi_8}$ et dans le gaz initial $R_0 = \frac{n_5^*}{n_8^*}$. Exprimer ce rapport $\eta_e = \frac{R_d}{R_0}$ en fonction de M_5 et de M_8 . Calculer η_e .
- 10) Une cascade est réalisée en plaçant p étages d'enrichissement en série, le gaz enrichi de l'étage k alimentant l'entrée de l'étage $k + 1$. Déterminer le nombre p de passages nécessaires à travers les parois poreuses pour arriver à la proportion finale de 4,0 % en isotope 235 partant d'un titre initial de 0,71 %. On supposera que η_e est le taux d'enrichissement de chaque étage.

Problème 2 : Moteur à deux temps...

Les scooters de cylindrée inférieure à 50 cm^3 sont équipés d'un moteur à explosion à deux temps. Celui-ci existe sous plusieurs formes. Le type le plus répandu (surtout dans le domaine des petites puissances) est celui qui comporte trois lumières ; celles-ci sont destinées à assurer l'aspiration, l'échappement et la communication entre le carter et le cylindre. Le mélange carburé (air - essence - huile) provenant du carburateur pénètre dans le carter pendant le mouvement du piston du P.M.B (point mort bas) au P.M.H (point mort haut). Au cours de la descente, cet air est comprimé et dirigé vers le cylindre par le canal de transfert. La légère compression du mélange carburé permet l'évacuation du gaz de combustion. Le graissage des parties mobiles, assuré par de l'huile que l'on mélange à l'essence, permet de réduire les frottements.

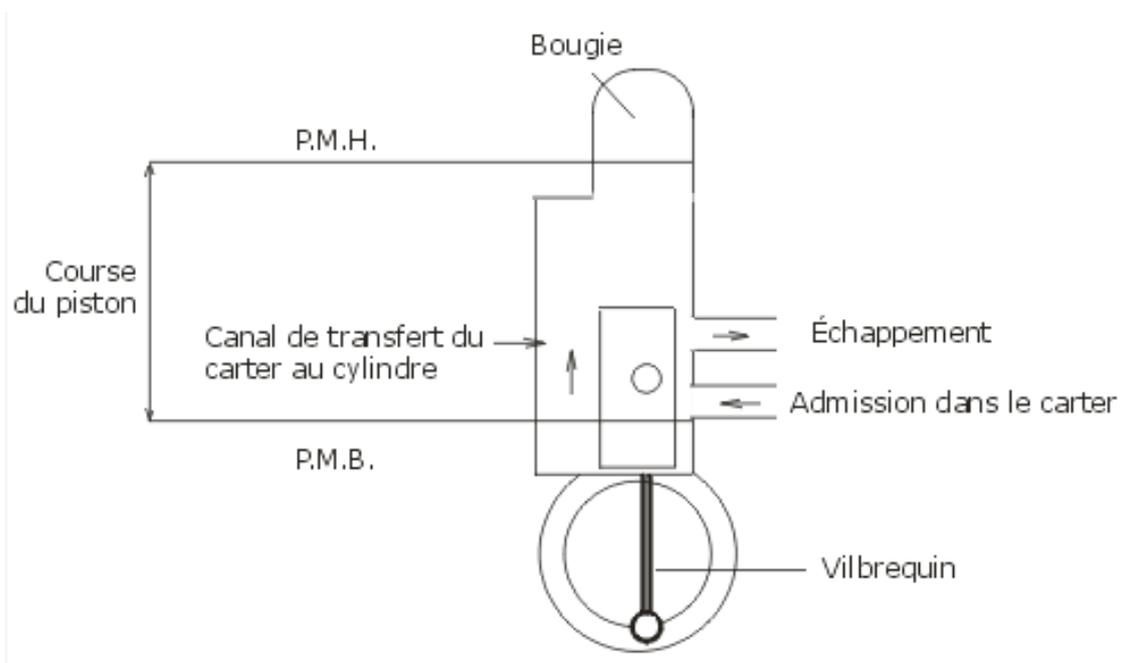


Figure 1

PRINCIPE GÉNÉRAL :

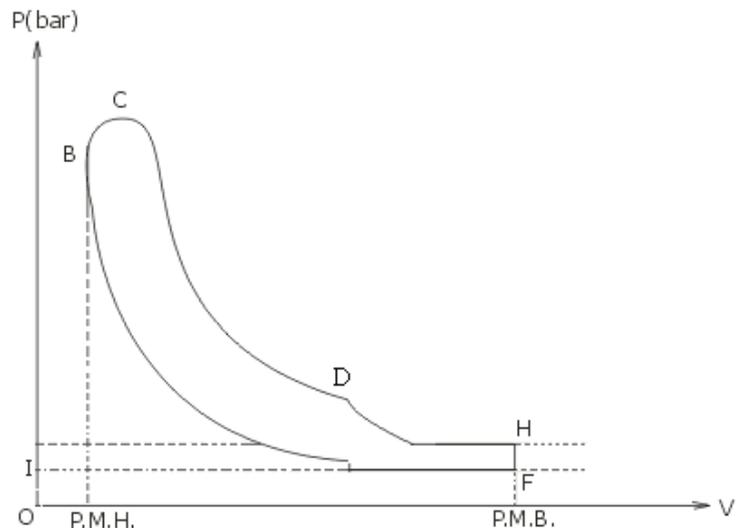
Il est rappelé que les quatre phases (admission, compression, combustion et détente), qui sont réparties sur deux tours du vilebrequin dans un quatre temps (deux allers et deux retours du piston) se succèdent

dans un deux temps sur un seul tour du vilebrequin (un aller et un retour du piston). Cela est possible parce que les phases échappement et admission ont lieu très rapidement et sensiblement au moment où le piston se trouve au point mort bas (P.M.B).

Pratiquement le diagramme de Watt (pression en ordonnée, volume en abscisse) a l'allure représentée sur la **figure 2**. On y distingue les deux temps :

- 1^{er} temps : compression du mélange carburé (FB), combustion (BC).
- 2^{ème} temps : détente (CD), échappement des gaz de combustion et admission d'une nouvelle charge de mélange carburé (DHF).

Figure 2
DIAGRAMME PRATIQUE DU
MOTEUR À DEUX TEMPS



Le diagramme théorique (B'C'D'F') s'identifie au cycle de Beau de Rochas. Il est établi avec les hypothèses suivantes :

- la combustion (B'C') est instantanée et se produit lorsque le volume du cylindre vaut V_C (piston au PMH).
- la détente (C'D') et la compression (F'B') du mélange sont adiabatiques réversibles.
- lors de l'échappement et de l'admission (D'F') quasi instantanées, le volume du cylindre est considéré constant égal à V_D .

La cylindrée du moteur est $V_D - V_C$.

Le taux de compression est égal au rapport volumétrique $a = \frac{V_D}{V_C}$.

Dans la notice technique d'un scooter (Spacer 50 Kymco), on lit les indications suivantes :

- vitesse maximale : 45 km.h⁻¹
- régime de puissance maximale : 7000 tours.min⁻¹ (vitesse angulaire de vilebrequin)
- puissance maximale : 4,40 kW
- cylindrée : 49,5 cm³
- course du piston : 39,2 mm (distance entre le point mort haut et le point mort bas)

On donne :

- la constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- la température et la pression du point F' : $T_F = 300\text{K}$, $P_F = 1,0 \text{ bar}$

On fera d'autre part l'approximation suivante : l'air étant en grand excès par rapport au mélange (huile + carburant), on assimilera le mélange carburé à un gaz parfait unique, de coefficient $\gamma = 1,4$ ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$)

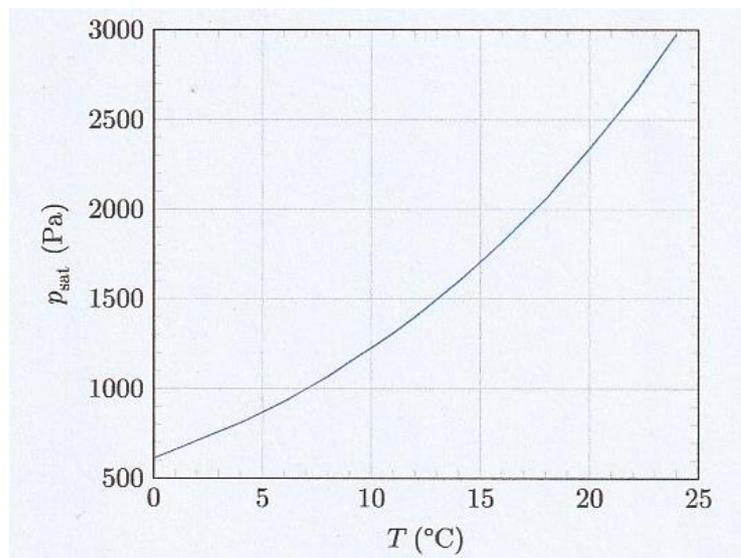
Problème 3 : L'air humide...

A. Grandeurs caractérisant un air humide

L'air renferme une proportion d'eau sous forme vapeur. On le qualifie d'air humide et on le caractérise par :

- son humidité absolue : $x = m_v/m_{as}$ où m_v et m_{as} sont respectivement les masses de vapeur d'eau et d'air sec dans un volume V quelconque d'air humide.
- son humidité relative : $HR = p_v(T)/P_{sat}(T)$ où $p_v(T)$ est la pression partielle en vapeur d'eau (à la température T) et $P_{sat}(T)$ la pression de vapeur saturante dont la dépendance avec la température est donnée par la figure 1.

Dans la suite, l'air humide sera étudié comme un mélange de deux gaz parfaits : l'air sec (indice as) et la vapeur d'eau (indice v). La pression totale p de l'air humide considérée constante et égale à $p = 1,013$ bar. On note respectivement M_{as} et M_e les masses molaires de l'air sec et de l'eau.



Pression de vapeur saturante en fonction de la température

1) Montrer que $x = d \cdot \left(\frac{p_v}{p-p_v}\right)$ où $d = M_e/M_{as}$.

2) Calculer la valeur maximale de l'humidité absolue x_{sat} de l'air humide à la température $T_0 = 20^\circ C$. On considère une chambre hermétiquement fermée de volume $V = 40 m^3$ occupée par une personne qui se couche à 22h. La température de la pièce est de $18^\circ C$ et l'humidité relative est de 50 %. La chambre n'est pas chauffée et la température au lever à 8h le lendemain est de $16^\circ C$. On trouvera en fin d'énoncé quelques exemples de sources d'eau vapeur ainsi que leur débit de production.

3) Au lever, l'occupant de la chambre constate-t-il une condensation de l'eau ? La réponse doit s'appuyer sur un raisonnement quantitatif.

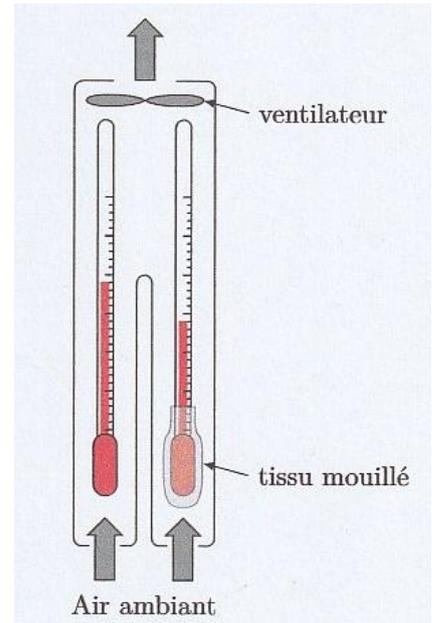
Le problème de la condensation peut être résolu en aérant les pièces du logement suffisamment et régulièrement. Certaines personnes sont réticentes à aérer lors des journées humides où l'air extérieur est froid et saturé en vapeur d'eau. Considérons une pièce initialement à la température $T_i = 20^\circ C$ et saturée en vapeur d'eau. L'air extérieur est à la température $T_a = 10^\circ C$ et est aussi saturé en vapeur d'eau. On renouvelle entièrement l'air de la pièce avec courant d'air.

4) Calculer l'humidité relative de l'air de la pièce après aération une fois que l'air est revenu à la température $T_i = 20^\circ C$ par contact avec les meubles, plafond et les parois intérieures de la pièce. Conclure.

B. Etude d'un hygromètre : le psychromètre

Un psychromètre est un instrument comportant deux thermomètres qui permet d'accéder à l'humidité relative de l'air ambiant. Ce dernier circule autour des réservoirs des deux thermomètres par aspiration ou par mouvement des thermomètres pour un psychromètre à fronde. Le thermomètre dit « sec » indique la température T_1 de l'air ambiant étudié. Le thermomètre dit « humide » a son réservoir recouvert d'un tissu mouillé et indique la « température humide » T_h .

L'humidité relative HR se déduit alors des mesures de T_1 et T_h .



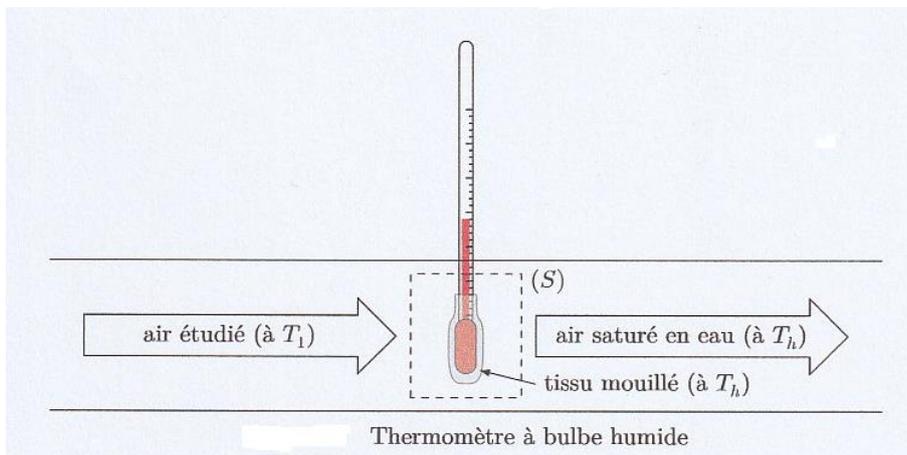
B-1 : Etude du thermomètre humide

La figure ci-dessous schématise le transport de l'air humide sur le thermomètre à bulbe humide. La température de sortie est déterminée à l'aide d'un bilan thermodynamique appliqué à la surface de contrôle (S) représentée sur la figure. A l'entrée, la température de l'air vaut T_1 et l'humidité absolue est x_1 . A la sortie, la température est T_h et l'humidité absolue est $x_2 = x_{sat}(T_h)$. Le débit massique d'air sec dans l'écoulement est noté $D_{m,as}$. La pression est uniforme et constante et vaut $p = 1,013$ bar. On néglige tout transfert thermique à travers la surface de contrôle (S).

5) Montrer que la masse δm_e d'eau qui se vaporise dans le volume de contrôle (défini par la surface (S) fermée) entre t et $t + dt$ est donnée par la relation :

$$\delta m_e = (x_{sat}(T_h) - x_1) \cdot D_{m,as} \cdot dt$$

avec $D_{m,as} = \frac{\delta m_{as}}{dt}$ débit massique d'air sec



6) On

note :

- $c_{p,as} = 1004 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$: la capacité thermique massique à pression constante de l'air sec
- $c_{p,v} = 2010 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$: la capacité thermique massique à pression constante de la vapeur d'eau
- $L_V(T) = 3155 - 2,39 \cdot T$ (en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ avec $273 \leq T \leq 323$ en K) : l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau liquide à la température T .
- δm : la masse d'air sec qui traverse le volume de contrôle entre t et $t + dt$.

Exprimer la variation d'enthalpie dH du fluide dans le volume de contrôle entre t et $t + dt$ en fonction des données.

7) L'évolution du fluide est isenthalpique. Montrer que :

$$x_1 = \frac{x_{sat}(T_h) \cdot L_v(T_h) + c_{p,as} \cdot (T_h - T_1)}{L_v(T_h) + c_{p,v} \cdot (T_1 - T_h)}$$

8) Après comparaison des ordres de grandeurs des termes de l'expression de x_1 montrer que l'humidité absolue de l'air devient :

$$x_1 = x_{sat}(T_h) - A \cdot (T_1 - T_h)$$

où on exprimera A en fonction des données.

On montre alors que l'humidité relative de l'air est :

$$HR = \frac{p_{sat}(T_h)}{p_{sat}(T_1)} \left(1 - \frac{\gamma}{p_{sat}(T_h)} (T_1 - T_h) \right)$$

où $\gamma = \frac{c_{p,as}}{L_v(T_h)} \frac{M_{as}}{M_e} p$ est la constante psychrométrique.

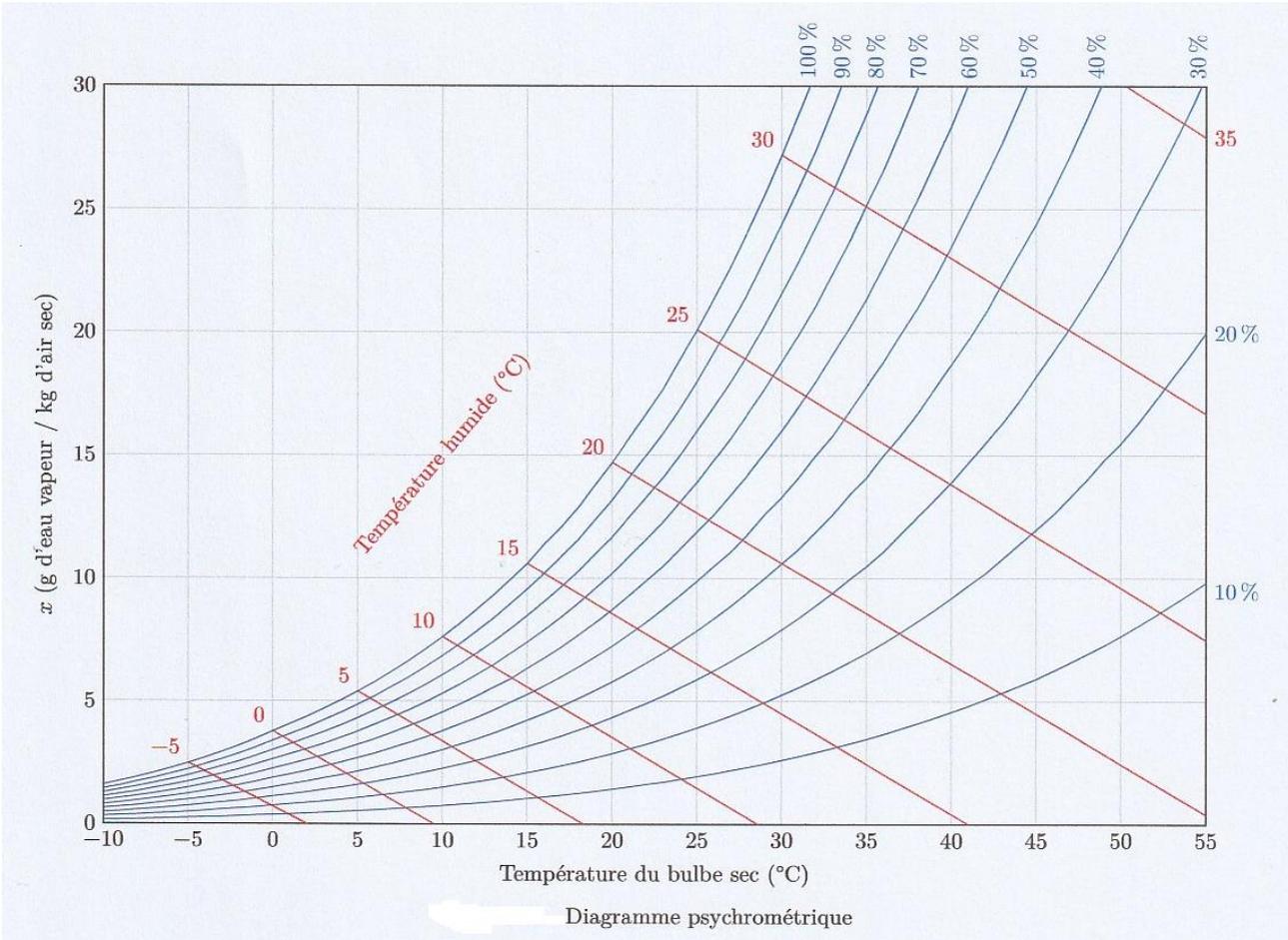
9) Application numérique : on mesure $T_1 = 20^\circ\text{C}$ et $T_h = 15^\circ\text{C}$. En déduire l'humidité relative HR de l'air étudié.

10) Le diagramme psychrométrique donné figure A du document réponse confirme-t-il cette valeur ? Justifier en annotant cette figure à rendre avec la copie.

Données et formulaire

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c_e = 4,2 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Masse molaire de l'air sec	$M_{as} = 29,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'eau	$M_e = 18,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
<i>Sources de l'humidité de l'air dans une pièce habitée (débit massique d'eau vapeur en $\text{g}\cdot\text{h}^{-1}$)</i>	
Cuisson	400 à 800
Lave-vaisselle	200 à 400
Douche	1500 à 3000
Bain	600 à 1200
Plantes	7 à 20
Être humain (selon son activité)	30 à 200

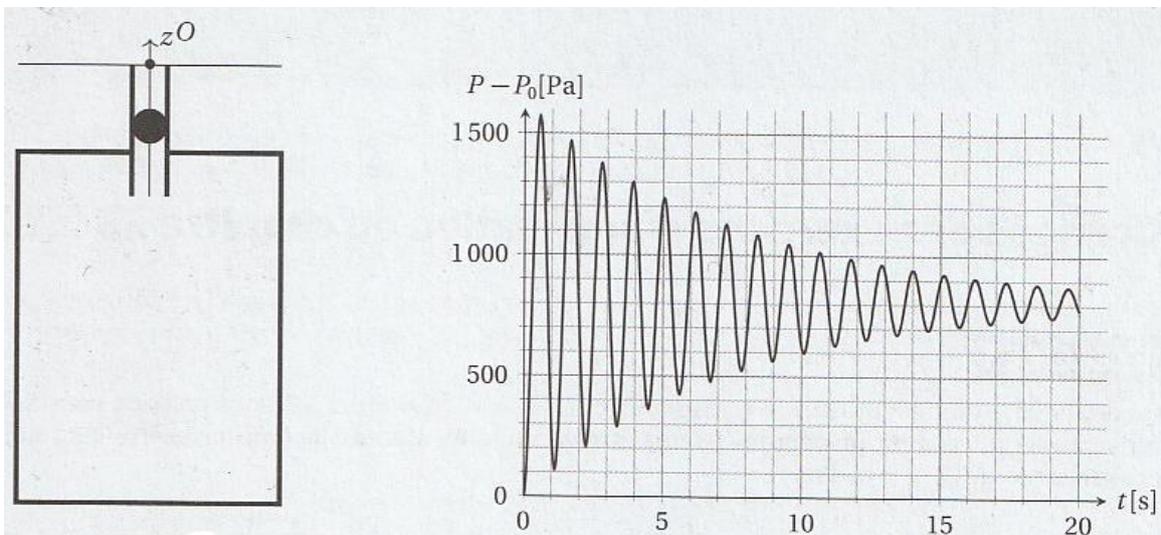
Document annexe à rendre avec la copie :



Problème 4 : Détermination de γ par la méthode de Rückhardt

La méthode de Rückhardt permet de déterminer le rapport $\gamma = C_P/C_V$ des capacités thermiques à pression constante et à volume constant de l'air contenu dans une bouteille (cf figure représentée ci-dessous). On étudie pour cela le mouvement d'une bille dans un tube en verre. La bille métallique, de diamètre très voisin de celui du tube se comporte comme un piston étanche. Lorsqu'on lâche la bille dans le tube de section s , on observe des oscillations autour d'une position d'équilibre. La méthode consiste à mesurer la période d'oscillation T du mouvement de la bille dans le tube. Pour cela, on enregistre la pression à l'aide d'un capteur de pression pendant 20,0 secondes. On donne l'enregistrement sur la figure ci-dessous. On observe qu'à l'équilibre, la position de la bille est à 41,0 cm en dessous du sommet O du tube de verre. On prendra pour l'axe (Oz) , un axe vertical ascendant dont l'origine est à l'extrémité supérieure du tube de verre.

On donne les valeurs numériques suivantes : masse de la bille $m = 16,6 \text{ g}$; section du tube $s = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; volume total de la bouteille jusqu'à O : $V_0 = 10,0 \text{ L}$; pression atmosphérique $P_0 = 1,00 \text{ bar}$; accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On note la pression régnant dans le flacon P et le volume du gaz enfermé V ; on admet que la force de pression exercée sur la bille est identique à celle qui s'exercerait sur un piston cylindrique de section s .



- 1) L'air contenu dans la bouteille est assimilé à un gaz parfait diatomique. Compte tenu du protocole expérimental, on peut faire l'hypothèse que l'évolution du gaz est lente (ou « quasi-statique ») et adiabatique. Justifier que dans ces conditions, l'évolution du gaz est isentropique et vérifie la loi de Laplace $P \cdot V^\gamma = cte$.
- 2) Justifier le fait que l'on peut traiter les grandeurs $V - V_0$ et $P - P_0$ comme des grandeurs infiniment petites. On notera alors : $dV = V - V_0$ et $dP = P - P_0$. En déduire $P - P_0$ en fonction de z , P_0 , V_0 et γ . On donne : $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x$ pour $x \ll 1$.
- 3) En déduire l'équation différentielle du mouvement vertical de la bille puis l'équation différentielle vérifiée par la pression P .
- 4) Donner l'expression littérale de la période propre T du signal. En utilisant l'enregistrement de la figure donnée ci-dessus, déterminer la valeur numérique de T puis la valeur de γ . Quelle est la valeur attendue pour l'air ? Justifier.
- 5) Déterminer l'expression littérale de la position d'équilibre z_{eq} et la calculer. Est-ce compatible avec le résultat expérimental ?
- 6) On cherche à savoir si le fait de négliger les échanges thermiques avec l'extérieur est un défaut majeur ou secondaire de ce premier modèle. On considère l'extérieur comme un thermostat à la température T_{ext} et on tient compte des échanges thermiques avec le système. On négligera la capacité thermique de la bille devant celle du gaz.
- 6-1) Dans ce nouveau modèle, quelle serait la position d'équilibre z'_{eq} ? Commenter.

6-2) On considère le système composé par l'ensemble {bille + gaz parfait contenu dans la bouteille}. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au système entre l'instant initial (moment où l'opérateur lâche la bille sans vitesse initiale) et l'instant final (système à l'équilibre thermodynamique).

6-3) En explicitant le premier principe, déterminer le transfert thermique Q reçu algébriquement par le système entre l'état initial et l'état final. Commenter le signe.

6-4) On donne l'identité thermodynamique : $S(T, V) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln T + n \cdot R \cdot \ln V + \text{cte}$. On note $X = m \cdot g / P_0 \cdot S$. Déterminer la variation d'entropie, l'entropie échangée et l'entropie créée en fonction de n, R et de X . Peut-on faire l'hypothèse que la relation de Laplace est vérifiée ? Justifier.