

Problème I Cosmologie : Orbitogramme de la Vilette

A Étude cinématique et force de gravitation

On considère un référentiel galiléen associé au repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, l'axe Oz est vertical ascendant. La position d'un point matériel M sera définie par ses coordonnées cylindriques, r ($r > 0$), θ et z . On notera respectivement $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, les vecteurs unitaires déduits de $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ par rotation d'angle θ autour de Oz .

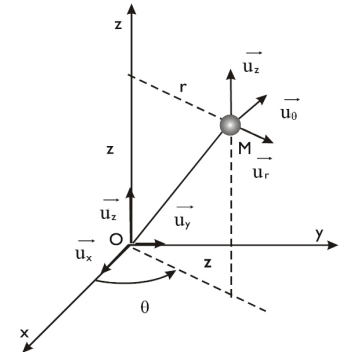
A.1 Exprimer $\vec{OM}$ dans la base cylindrique.

A.2 En déduire la vitesse $\vec{v}$ dans cette même base.

A.3 Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ puis montrer que $\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta})$.

A.4 Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par un point M_1 de masse m_1 sur un point M_2 de masse m_2 . On notera $r = M_1 M_2$ la distance entre les points et $\vec{u} = \frac{\vec{M_1 M_2}}{r}$ le vecteur unitaire orienté de M_1 vers M_2 .

A.5 Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle dont on établira l'expression. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.



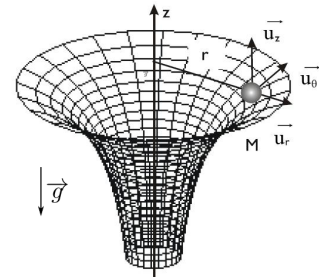
B Étude dynamique et énergétique

On étudie le mouvement d'une bille d'acier M de masse m , assimilée à un point matériel sur une surface de révolution, dans le champ de pesanteur supposé uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. La surface sur laquelle roule la bille est engendrée par la révolution d'une portion d'hyperbole, $z = -\frac{k}{r}$ avec $k > 0$. Les frottements seront négligés et la réaction du support sera notée : $\vec{R}_N = R_r \vec{u}_r + R_\theta \vec{u}_\theta + R_z \vec{u}_z$.

B.1 Justifier sans calcul que $R_\theta = 0$.

B.2 Faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille. Préciser si ces forces dérivent d'une énergie potentielle. Dans l'affirmative, préciser l'expression de l'énergie potentielle associée en fonction de la variable r uniquement. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

B.3 Écrire le principe fondamental de la dynamique et faire la projection dans la base cylindrique. En déduire que la quantité $r^2 \dot{\theta}$ est une constante notée C .



B.4 Exprimer l'énergie mécanique sous la forme : $E_m = \frac{1}{2} m \alpha(r) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$. Préciser $\alpha(r)$ en fonction de k et r . Que peut-on dire de l'énergie mécanique ? Justifier.

B.5 On définit une énergie potentielle effective $E_{peff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$. Tracer l'allure de la courbe $E_{peff}(r)$. En fonction de la valeur de l'énergie mécanique initiale du système E_0 , discuter le caractère lié ou libre du mouvement.

B.6 Pour quelle valeur de r a-t-on un mouvement circulaire ? On exprimera le rayon du mouvement circulaire r_c en fonction de C , g et k .

B.7 On lance la bille d'une distance r_c avec une vitesse $\vec{v}_0$. Préciser la direction et le module de $\vec{v}_0$ pour avoir un mouvement circulaire.

Problème II Seul sur Mars

L'histoire du film *The Martian* (Seul sur Mars) de Ridley Scott, montre comment un homme, Mark Watney, survit seul sur Mars grâce à ses connaissances scientifiques. L'environnement hostile de la planète représente une contrainte de taille pour les ingénieurs et les scientifiques qui travaillent pour que des hommes puissent un jour poser le pied sur la planète rouge. La NASA annonce un vol habité pour Mars dans les années 2030, l'hypothèse du film n'est donc pas irréaliste. Même si cette histoire repose sur des travaux scientifiques et des techniques aérospatiales actuelles, on peut se demander si l'histoire est bien réaliste.

Données

Données Terre-Mars :

	Terre	Mars
Composition de l'atmosphère	N ₂ (77%), O ₂ (21%)	CO ₂ (95%), N ₂ (2,7%)
Rayon des planètes (km)	6380	3390
Masse des planètes (kg)	$5,97 \times 10^{24}$	$6,42 \times 10^{23}$

Constantes et grandeurs :

Constante gravitationnelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Célérité de la lumière	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Masses molaire (g mol ⁻¹)	H : 1,00 ; C : 12,0 ; N : 14,0 ; O : 16,0 ; Ar : 39,9
Distance Terre-Soleil	$a_T = 1 \text{ u.a.} = 1,50 \times 10^8 \text{ km}$
Rayon du Soleil	$R_s = 6,96 \times 10^5 \text{ km}$
Masse du vaisseau Hermès	$\approx 500 \text{ t}$

A Généralités

A.1 Définir le référentiel héliocentrique.

A.2 Montrer que le mouvement d'une planète autour du Soleil de centre de masse S est plan. Définir ce plan à partir de la position initiale de la planète P_0 et de sa vitesse initiale $\vec{v}_0$.

Dans la suite on considère le mouvement de la planète P de masse M_P en coordonnées polaires (r, θ) de centre S .

A.3 Calculer le moment cinétique de la planète par rapport à S . En déduire que le produit $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

A.4 Énoncer puis démontrer la deuxième loi de Kepler.

A.5 On considère que le mouvement de la planète autour du Soleil est circulaire de rayon r_P . Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer la norme de la vitesse de la planète en fonction de G , de la masse du Soleil M_S et de r_P .

A.6 Démontrer dans le cas d'un mouvement circulaire que le rapport entre le carré de la période de la révolution de la planète autour du Soleil et le cube de la distance Soleil-planète est constant pour toutes les planètes du système solaire. Exprimer cette constante et nommer cette loi.

B La planète Mars

Mars est la quatrième planète par ordre de distance croissante au Soleil et la deuxième par masse et par taille croissantes sur les huit planètes que compte le système solaire. Dans le référentiel héliocentrique (auss appelé référentiel de Kepler), supposé galiléen, la trajectoire de Mars est une ellipse contenue dans le plan de l'écliptique.

Extrait de CNRS *Le journal*

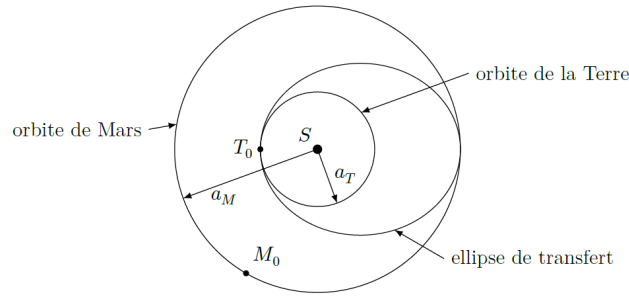
Question : Envoyer des humains sur Mars coûterait au moins 100 ou 200 milliards de dollars et ne serait possible que vers 2050, à condition qu'une vraie volonté politique se dégage. Ne vaut-il pas mieux continuer à envoyer des robots ?

Réponse du planétologue François Forget : C'est un vieux débat, [...] les robots ne sont pas forcément plus efficaces que les humains. Par exemple, un géologue peut repérer en quelques secondes une pierre intéressante, alors qu'il faudra des jours pour la repérer en manœuvrant un rover depuis la Terre, vu que les signaux radio mettent 5 à 22 minutes entre les deux planètes. Mais il y a une alternative qui me plaît bien : envoyer des humains en orbite martienne sans qu'ils se posent à la surface. Il est en effet très difficile — et donc coûteux — de poser des charges de plus d'une tonne sur Mars. Parce que l'atmosphère y est trop fine pour freiner correctement avec un parachute comme sur Terre, et trop épaisse pour ralentir juste au-dessus de la surface avec de simples rétrofusées comme sur notre Lune. Autre avantage : plus besoin de MAV (Mars Ascent Vehicle) pour remonter, ni d'habitat en surface. Au final, depuis l'orbite, les astronautes pourraient facilement aller se poser sur les petites lunes Phobos ou Deimos (qui n'ont presque pas de gravité), et surtout piloter en quasi temps réel des robots sophistiqués envoyés sur Mars elle-même. Une telle mission pourrait avoir lieu dès 2035.

B.1 En utilisant l'extrait du *CNRS Le Journal*, proposer une estimation de la distance de Mars au Soleil. On pourra s'aider d'un graphique représentant la trajectoire de Mars et de la Terre autour du Soleil en supposant que celles-ci sont circulaires.

D Trajectoire du vaisseau Hermès

Dans cette partie, on se place dans le référentiel de Kepler. Le vaisseau Hermès est utilisé pour les trajets Terre-Mars au cours desquels le vaisseau n'est soumis qu'à l'attraction du Soleil. L'orbite de transfert utilisée est une orbite de transfert de Hohmann : ellipse dont le périhélie est un point de l'orbite de la Terre et l'aphélie un point de l'orbite de Mars (figure ci-dessous). On supposera, pour simplifier, que les orbites de la Terre et de Mars sont circulaires de rayons respectifs a_T et a_M .



D.1 Déterminer le demi grand axe a de l'ellipse de transfert.

On considère le transfert du vaisseau de la Terre vers la planète Mars, les positions initiales de la Terre et de Mars étant notées respectivement T_0 et M_0 .

D.2 Déterminer la durée du transfert. En déduire la position de Mars au moment du lancement sur Terre (M_0) (décalage angulaire en degrés). En déduire également la position de la Terre au moment de l'arrivée du vaisseau à proximité de Mars (les positions de la Terre et de Mars seront à ce moment là notées respectivement T_1 et M_1).

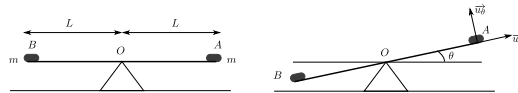
D.3 Une fois le vaisseau arrivé au voisinage de la planète Mars (M_1, T_1), combien de temps faut-il attendre pour envisager un transfert d'Hohmann permettant de ramener le vaisseau à proximité de la Terre ? On notera T_2 et M_2 les positions respectives de la Terre et de Mars au début de ce second transfert.

D.4 Représenter les points T_0, M_0, T_1, M_1, T_2 et M_2 , ainsi que les orbites d'aller et de retour, sur un schéma reproduisant la figure ci-dessus.

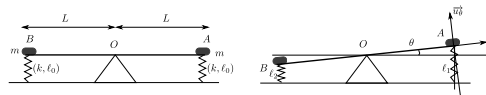
D.5 En déduire qu'une mission aller-retour vers Mars dure au minimum 972 jours.

Problème III Un jeu d'enfant !

Une barre homogène de longueur $2L$ de moment d'inertie J rapport à l'axe (Oz) et de masse m_b est liée en O à un support fixe par une liaison pivot parfaite. Deux enfants de même masse m que l'on considérera comme ponctuels viennent s'asseoir en A et en B .



1. Montrer que le système {barre+enfants} est toujours à l'équilibre quel que soit l'angle θ .
2. On schématise désormais une balançoire de type trébuchet à ressort où on a rajouté au système précédent deux ressorts identiques verticaux de raideur k , et de longueur à vide ℓ_0 identiques fixés entre le sol et les extrémités A et B de la barre. Lorsque la barre est à l'horizontale la longueur des ressorts est égale à leur longueur à vide. Dans toute la suite, on se limitera aux petits angles θ , et on admettra que les altitudes de A et B par rapport au sol sont données par : $\ell_1 = \ell_0 + L\theta$ et $\ell_2 = \ell_0 - L\theta$.



- 2.a. En supposant les tensions des ressorts verticales, montrer que le moment résultant des forces élastiques par rapport au point O s'écrit $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{el}) = -2kL^2\theta\vec{u}_z$.
- 2.b. Étudier alors l'équilibre du système {barre+enfants}.
- 2.c. Établir l'équation différentielle du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique au système {barre+enfants}.
- 2.d. Exprimer alors la période propre des petites oscillations libres du système.
- 2.e. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système. Que peut-on dire de cette énergie ? En posant θ_{max} la valeur maximale de θ , déterminer l'expression de l'énergie mécanique.
- 2.f. Retrouver l'équation différentielle du mouvement à partir de la question précédente.
- 2.g. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'enfant placé en A , calculer les composantes R_r et R_θ de la réaction de la barre en fonction de θ et θ_{max} .
- 2.h. Écrire l'équation qui donne l'angle θ auquel l'enfant est susceptible de décoller. Commenter.