

Devoir surveillé n° 8

Statique des fluides – Mécanique

- La durée de l'épreuve est de 3 heures. Les étudiants ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Les résultats devront être encadrés, un malus pourra être appliqué dans le cas contraire.
- Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Problème 1 Observation de l'atmosphère

Qu'il s'agisse de descriptions qualitatives ou de mesures de paramètres physiques, l'observation se trouve à la base de toute prévision météorologique. Aux côtés notamment de l'observation des océans, du manteau neigeux et des calottes glaciaires, l'observation de l'atmosphère terrestre joue un rôle primordial. Agrégées dans le temps et sur de larges zones géographiques, ces observations atmosphériques participent également à une meilleure compréhension des évolutions climatiques.

Ce sujet propose d'étudier quelques dispositifs d'observation : les ballons-sondes qui fournissent les données permettant d'établir les profils verticaux en pression et les satellites d'observation de la Terre. **Il est constitué de deux parties indépendantes.**

Données :

- constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$;
- masses molaires atomiques : $M_O = 16 \text{ g mol}^{-1}$; $M_{He} = 4,0 \text{ g mol}^{-1}$; $M_N = 14 \text{ g mol}^{-1}$;
- la composition de l'air est supposée connue ;
- rayon de la Terre : $R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$;
- inclinaison de l'axe de la Terre par rapport au plan de l'écliptique : $23,5^\circ$;
- constante universelle de gravitation : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$;
- masse de la Terre : $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$;

A Dans les airs

L'acquisition des données pendant l'ascension d'un ballon-sonde permet d'établir des profils verticaux, c'est-à-dire l'évolution des paramètres météorologiques en fonction de l'altitude.

Les profils verticaux établis par sondage sont d'une grande précision et sont très utiles en prévision météorologique ainsi que pour développer des modèles de l'atmosphère. D'autre part, bien qu'il s'agisse d'une technologie relativement ancienne, leurs données sont toujours employées pour étalonner les capteurs de télédétection radar et satellitaires.

Ballons-sondes ouverts

Un des enjeux dans la conception des ballons-sondes est de s'assurer de leur capacité à sonder la totalité de la troposphère, où se déroulent la plupart des phénomènes météorologiques. Selon la saison et la latitude, la troposphère, qui est la première couche atmosphérique quand on part du sol, a une épaisseur qui peut varier de huit à quinze kilomètres. On retient ici une épaisseur de la troposphère égale à 12 km.

On étudie un ballon-sonde ouvert constitué d'une masse d'hélium contenue dans une enveloppe ouverte rigide de volume $V_0 = 100 \text{ m}^3$ constant et d'un ensemble d'équipements (enveloppe, parachute de la nacelle, nacelle, capteurs, enregistreurs, etc.). L'enveloppe étant rigide et ouverte, si le gaz qu'elle contient est amené à se dilater, celui-ci peut s'en échapper.

On considère qu'au sol la température atmosphérique est $T_0 = 290 \text{ K}$ et que la pression atmosphérique est $p_0 = 1,00 \text{ bar}$. On note M_{He} la masse molaire atomique de l'hélium.

A.1 Modèle du gaz parfait

A.1.1 Rappeler les hypothèses qui fondent le modèle du gaz parfait puis l'équation d'état du gaz parfait.

A.1.2 Déterminer la valeur de la masse d'hélium présente dans l'enveloppe du ballon quand il est au sol à la température T_0 et à la pression p_0 .

A.2 Conditions de décollage

A.2.1 Quelle est l'origine physique de la poussée d'Archimède ?

A.2.2 L'enveloppe qui contient l'hélium a un volume constant V_0 et on considère l'hélium à l'équilibre thermodynamique avec l'atmosphère extérieure. Déterminer l'expression de la poussée d'Archimède que le système constitué de l'enveloppe et de l'hélium qu'elle contient subit au sol en fonction notamment de la masse molaire de l'air M_{air} et de l'intensité du champ de pesanteur g .

A.2.3 On néglige les effets de la poussée d'Archimède sur les parties autres que l'enveloppe contenant le gaz. On note m' la masse des équipements, c'est-à-dire la masse totale exceptée celle de l'hélium. Déterminer la valeur maximale de la masse des équipements pour que le ballon puisse décoller.

A.3 La masse des équipements du ballon-sonde est $m' = 10,0$ kg et le ballon décolle. On suppose qu'il y a toujours équilibre thermodynamique entre l'hélium du ballon et l'atmosphère.

A.3.1 Montrer que l'altitude z^* à laquelle s'annule la force ascensionnelle résultant du poids et de la poussée d'Archimède est déterminée par l'équation

$$\frac{p(z^*)}{T(z^*)} = \frac{m'R}{V_0(M_{air} - M_{He})}$$

où p et T sont respectivement la pression et la température atmosphériques.

A.3.2 À l'aide de la courbe $\frac{p(z)}{T(z)} = f(z)$ de la figure 1, déterminer si la valeur de l'altitude z^* est suffisante pour obtenir un profil vertical complet de la troposphère.

A.3.3 Avec les hypothèses du modèle précédent, l'altitude du ballon oscillerait en fait autour de z^* puisque la force ascensionnelle change de sens de part et d'autre de cette altitude. Citer un phénomène qui finit en réalité par atténuer ces oscillations.

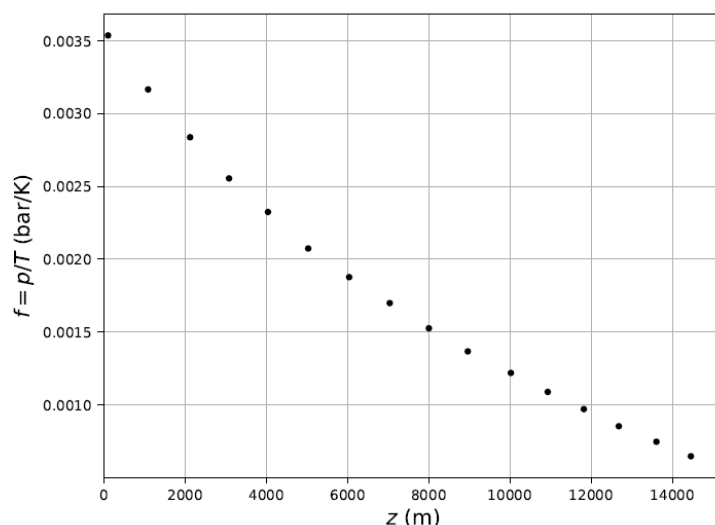


FIGURE 1 – Évolution du rapport de la pression en bar sur la température en kelvin en fonction de l'altitude en mètre. Données Météo-France.

Modélisation de la troposphère

Modéliser correctement les profils verticaux de la troposphère est un enjeu important car l'essentiel des phénomènes météorologiques s'y déroulent. On s'intéresse ici à la modélisation du profil vertical en pression et à la comparaison des modèles avec les mesures réalisées par radio-sondage par Météo-France.

On note z l'altitude, l'axe vertical ascendant étant orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$. La température et la pression à l'altitude $z = 0$ sont respectivement notées T_0 et p_0 .

A.4 Démontrer que le principe fondamental de la statique des fluides s'exprime par la relation $\vec{\text{grad}}(p) = \rho \vec{g}$ où p est la pression, ρ la masse volumique du fluide et $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ le champ de pesanteur.

A.5 En déduire l'expression de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude pour une atmosphère modélisée par un gaz parfait isotherme dans un champ de pesanteur uniforme.

Comme on peut le voir sur la figure 2, les prévisions de ce modèle s'éloignent tendanciellement des données expérimentales quand l'altitude augmente. On cherche à modifier le modèle pour en améliorer les prévisions.

A.6 Pour évaluer l'influence de l'hypothèse « pesanteur uniforme », estimer la variation relative de l'intensité de pesanteur entre un point situé à la surface du globe terrestre supposé à répartition de masse sphérique et un point à une altitude de 12 km. Conclure.

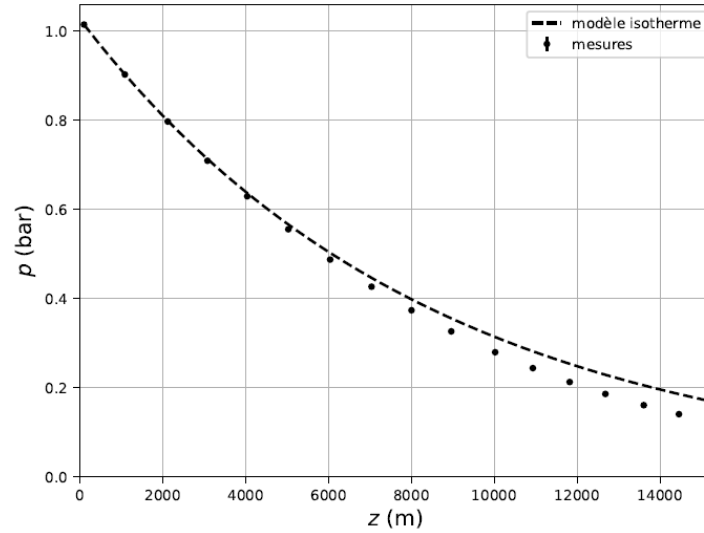


FIGURE 2 – Comparaison entre le profil vertical en pression mesuré (données Météo-France) et la prévision dans le cadre modèle du gaz parfait isotherme dans un champ de pesanteur uniforme.

On conserve l'hypothèse de la pesanteur uniforme et on propose plutôt de remettre en question l'hypothèse « atmosphère isotherme », en tenant compte des variations de température avec l'altitude.

A.7 On propose un modèle d'atmosphère à gradient de température constant : $\frac{dT}{dz} = -a$, où a est une constante positive.

A.7.1 En déduire l'expression de $T(z)$ en prenant $z = 0$ pour l'altitude du sol.

A.7.2 En supposant que la pesanteur est uniforme, démontrer que l'expression de la pression en fonction de l'altitude peut se mettre sous la forme $p = p_0(1 - \alpha z)^\beta$ où α et β sont deux constantes dont on donnera les expressions en fonction de a , T_0 , M_{air} , g et R .

A.7.3 On réalise un ajustement numérique des paramètres α et β de l'expression précédente à partir des pressions mesurées expérimentalement. L'ajustement mène aux estimations suivantes : $\alpha = 2,1 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ et $\beta = 5,6$. En déduire la valeur de a . Commenter.

A.7.4 À l'aide de développements limités, montrer qu'à très basse altitude le modèle isotherme et le modèle à gradient de température prévoient des évolutions de la pression avec l'altitude similaires.

A.8 On souhaite tester la compatibilité du modèle à gradient de température avec les mesures.

A.8.1 Pour le capteur de pression utilisé chaque valeur mesurée de la pression p est dans un intervalle $[p - 2,0 \text{ hPa} ; p + 2,0 \text{ hPa}]$. Déterminer l'expression de l'incertitude-type sur une valeur mesurée de p dans le cadre d'un modèle de probabilité uniforme (modèle rectangulaire).

A.8.2 On représente à la figure 3 la courbe des écarts entre les prévisions du modèle à gradient de température et les mesures. Après avoir énoncé un critère de compatibilité entre le modèle et les mesures, discuter de cette compatibilité à l'aide de la courbe de la figure 3.

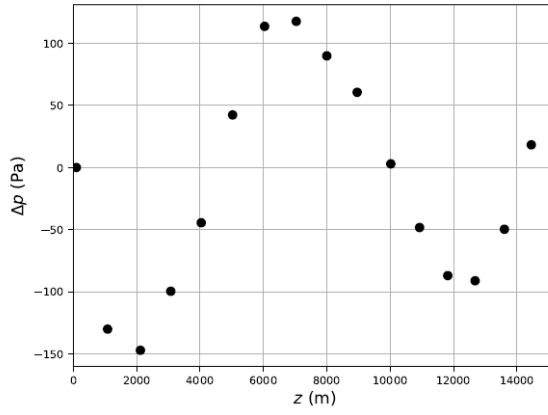


FIGURE 3 – Courbe des écarts entre les prévisions du modèle à gradient de température et les mesures.

B Depuis l'espace

Dans cette partie, on s'intéresse aux satellites qui permettent d'observer de façon globale les phénomènes météorologiques depuis l'extérieur de l'atmosphère. On distingue principalement deux types de satellites météorologiques : les satellites géostationnaires et les satellites défilants héliosynchrones à orbite polaire. On se propose d'étudier certaines de leurs caractéristiques : surface visible depuis le satellite, balayage et résolution.

Dans toute la suite, on considère que la Terre et son atmosphère forment une sphère de rayon R_T et on néglige les effets optiques liés à la présence de l'atmosphère (réfraction, diffusion, etc.).

Surface visible depuis un satellite géostationnaire

B.1 Positionnement d'un satellite géostationnaire

B.1.1 Définir ce qu'est un satellite géostationnaire.

B.1.2 Montrer que le mouvement de ce satellite est plan et expliquer pourquoi un satellite géostationnaire a forcément une orbite circulaire contenue dans le plan équatorial terrestre.

B.1.3 Déterminer la valeur de l'altitude h d'un satellite terrestre en orbite géostationnaire.

Un des intérêts des satellites géostationnaires est qu'ils observent en continu la même zone de la surface terrestre, ce qui permet de réaliser facilement des images animées de l'atmosphère, donnant une idée très précise de l'évolution des phénomènes météorologiques. En revanche, du fait de leur éloignement et du positionnement de leur orbite, ils sont mal adaptés pour observer les parties de la Terre situées aux grandes latitudes.

B.2 Surface terrestre visible depuis un satellite géostationnaire

B.2.1 En considérant que la partie de la Terre visible depuis le satellite est limitée par un faisceau partant du satellite et dont les extrémités sont tangentes à la sphère terrestre, déterminer l'expression de la latitude maximale observable en fonction de son altitude h et du rayon terrestre R_T .

B.2.2 Sous les hypothèses précédentes est-il possible d'observer depuis un satellite géostationnaire les pôles géographiques ? Des régions situées au-delà des cercles polaires ?

B.2.3 Montrer que la fraction de l'aire de la surface terrestre visible depuis un satellite géostationnaire est donnée par $\%_S = \frac{1}{2} \frac{h}{R_T + h}$. Effectuer l'application numérique.

Dans la pratique, plusieurs phénomènes physiques limitent encore plus la visibilité des grandes latitudes et la fraction réellement visible est plus faible.

Ces limitations expliquent en partie pourquoi les observations issues des satellites géostationnaires sont complétées par des observations issues de satellites défilants héliosynchrones à orbites polaires.

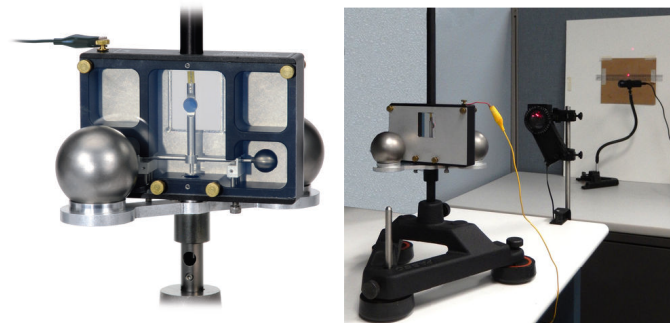
Problème 2 La mesure de G en travaux pratiques

Données :

- Constante Newtonienne de la gravitation G : $G = 6,674\,30 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
- Accélération de la pesanteur g_0 : $g_0 = 9,81 \text{ m s}^{-2}$

L'expérience de Cavendish peut être aujourd'hui reproduite en classe avec du matériel dédié qui permet la mesure de G avec une précision relative de l'ordre du pour cent. Le dispositif expérimental est le suivant (voir Figure 1). Deux petites sphères de tungstène de même masse $m = 0,038 \text{ kg}$ disposées à l'extrémité d'une tige en aluminium de longueur $d = 10 \text{ cm}$ suspendue à un ruban de beryllium forment un pendule de torsion dont l'axe, de vecteur unitaire $\vec{e}_z$, est selon la verticale (Oz) du lieu. L'attraction gravitationnelle entre ces petites sphères et deux grandes sphères de tungstène de masse $M = 1,5 \text{ kg}$ que l'on peut déplacer facilement, provoque la torsion du ruban, mise en évidence grâce à un faisceau laser réfléchi sur un miroir solidaire du ruban. Cela se fait en deux étapes. Partant d'un pendule au repos, les grandes sphères sont tout d'abord rapidement placées en vis-à-vis des petites sphères pour engendrer un couple. Cette mise hors d'équilibre se manifeste par des oscillations amorties du pendule qui évolue vers son nouvel état d'équilibre. Sans attendre que cet équilibre soit atteint, les grandes sphères sont ensuite tournées à presque 180° . Les oscillations amorties du pendule se poursuivent mais autour d'un autre état d'équilibre. Toutes ces oscillations sont visualisées par le mouvement de la tâche lumineuse que fait le faisceau laser sur un écran éloigné. On enregistre ces oscillations et on en extrait les positions de la tâche dans les deux états d'équilibre sus-mentionnés. On admet que pendant la durée de l'expérience, les centres des sphères demeurent dans un plan parfaitement horizontal et qu'on a une parfaite symétrie du dispositif par rapport à la verticale sur les positions des sphères de chaque paire.

La figure ci-dessous représente le dispositif expérimental pour la mesure de la constante gravitationnelle G . À gauche : le pendule de torsion et les (grandes) sphères mobiles. À droite : la partie optique du montage.



A Ordre de grandeur de l'expérience

A.1 Rappeler l'expression du vecteur force gravitationnelle $\vec{F}_{12}$ qui s'exerce entre deux masses ponctuelles m_1 et m_2 distantes de R .

A.2 Calculer numériquement la norme de la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par une masse de $M = 1,5 \text{ kg}$ sur une masse de $m = 0,038 \text{ kg}$ distante de $b = 4,27 \text{ cm}$. La comparer au poids de m sur Terre.

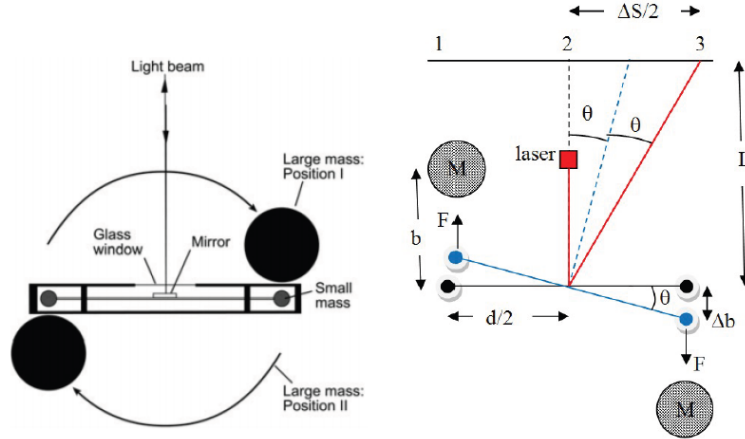
A.3 Expliquer l'intérêt du dispositif expérimental de Cavendish par rapport à une situation où on mesurerait par exemple l'allongement d'un ressort vertical auquel serait suspendue la masse m lorsque l'on approcherait la masse M .

A.4 Calculer numériquement la norme du moment exercé par $\vec{F}$ si le bras de levier est de l'ordre de 10 cm . En admettant que le moment du couple de rappel du pendule de torsion s'exprime sous la forme $-C\theta\vec{e}_z$ où C est une constante positive et θ est la déviation angulaire du pendule par rapport à sa position au repos, donner un ordre de grandeur de C pour que θ soit de l'ordre de $0,3^\circ$. Expliquer l'intérêt du dispositif optique pour mesurer cette déviation.

A.5 Estimer l'épaisseur du ruban de beryllium sachant que la constante de torsion s'exprime sous la forme $C \approx \frac{\mu e^3 h}{3\ell}$ où μ est la constante de rigidité du matériau, ℓ sa longueur et h sa largeur. On donne $\mu = 116 \text{ GPa}$, $\ell = 26 \text{ cm}$ et $h = 0,15 \text{ mm}$. Qu'en concluez vous sur la difficulté de réalisation du dispositif expérimental ?

B Modélisation et expérimentation

On cherche à établir les équations qui permettent de déterminer G à partir des données et des mesures effectuées grâce au dispositif expérimental. Les positions des sphères et les notations utilisées sont explicitées dans la figure ci-dessous. On fait dans un premier temps l'hypothèse que la seule force que subit dans le plan horizontal (celui de la figure) chaque petite sphère est la force gravitationnelle exercée par la grande sphère la plus proche. On note F sa norme.



Lorsque les grandes sphères sont amenées dans la position I, la tâche lumineuse quitte le spot au repos 2 et oscille autour du spot 1 sur l'écran. Lorsque les grandes sphères sont placées dans la position II, symétrique de I par rapport au plan qui contient l'axe du pendule au repos et le faisceau laser incident, la tâche lumineuse se déplace et oscille autour du spot 3. C'est la distance ΔS entre les positions 1 et 3 qui est extraite de l'enregistrement des oscillations. En raison de la symétrie du dispositif, c'est le double de la distance entre les positions 2 et 3.

B.1 On a placé l'écran à la distance $L = 168,5$ cm du miroir solidaire du pendule de torsion et on mesure la déviation du faisceau laser $\Delta S = 4,2$ cm. En déduire la valeur numérique de θ_e , déviation angulaire par rapport à la position au repos lorsque l'on approche les grandes sphères des petites. Justifier, dans ces conditions, que la variation de l'orientation de la force exercée sur la petite sphère est négligeable au premier ordre en θ_e et que les petites sphères se déplacent selon la perpendiculaire au plan du pendule au repos.

On fait d'abord l'hypothèse que le déplacement Δb de chaque petite sphère par rapport à sa position au repos est négligeable.

B.2 Exprimer la condition d'équilibre du pendule de torsion lorsque les grandes sphères sont en position II. En déduire une expression de G en fonction de θ_e , d , b , M , m et C .

En pratique, il est difficile de connaître directement la valeur de C . Elle est estimée à partir de la mesure de la pulsation des oscillations amorties du pendule. On considère donc le régime transitoire où $\theta = \theta(t)$ dépend du temps. On suppose que s'exerce sur le pendule, en plus du moment des forces gravitationnelles et du couple de rappel, un moment de frottement « fluide » de la forme $-\alpha \dot{\theta} \vec{e}_z$ ($\alpha > 0$).

B.3 Écrire le théorème du moment cinétique pour le pendule de torsion en introduisant son moment d'inertie J par rapport à l'axe Oz . J s'exprime ici avec une excellente approximation comme $J = 2(m \frac{d^2}{4} + \frac{2}{5}mr^2)$ où r est le rayon d'une petite sphère. Justifier brièvement cette expression.

B.4 On introduit la variable $\varepsilon(t) = \theta(t) - \theta_e$. Montrer que la variable $\varepsilon(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$J\ddot{\varepsilon} = -\alpha\dot{\varepsilon} - C\varepsilon$$

Donner la solution générale à cette équation dans l'hypothèse où $\alpha \ll \sqrt{JC}$. Conclure que l'évolution du système est pseudo-périodique et que la pulsation ω correspondante vérifie $\omega \approx \sqrt{\frac{C}{J}}$.

Les tableaux ci-dessous listent l'ensemble des données et des mesures effectuées ainsi que leurs incertitudes.

b (cm)	δb (cm)	r (cm)	δr (cm)	d (cm)	δd (cm)	M (kg)	δM (kg)
4,27	0,02	0,818	0,003	10	0,1	1,500	0,005

L (cm)	δL (cm)	ΔS (cm)	$\delta \Delta S$ (cm)	ω (rad.s ⁻¹)	$\delta \omega$ (rad.s ⁻¹)
168,5	0,2	4,2	0,03	0,01285	0,00005

B.5 Exprimer G en fonction de L , ΔS , M , r , d , b et ω . Calculer numériquement les valeurs de J , C et θ_e puis en déduire celle de G . Estimer qualitativement son incertitude au regard du tableau ci-dessous. Commenter.

Une première cause possible d'erreur systématique est d'avoir négligé le déplacement Δb .

B.6 Exprimer Δb en fonction de d et de θ . Écrire la nouvelle condition d'équilibre du pendule de torsion lorsque les grandes sphères sont en position II, en tenant compte du déplacement à l'équilibre Δb_e . En déduire une expression de G en fonction de θ_e , d , b , M , m et C . Calculer numériquement le déplacement Δb_e . Justifier que l'on doit prendre en compte a priori Δb_e si on veut éviter une erreur relative systématique supérieure à un pour cent dans la mesure de G .

On rappelle le développement limité suivant : $\frac{1}{(1-x)^2} \approx 1 + 2x$ à l'ordre 1 en x .

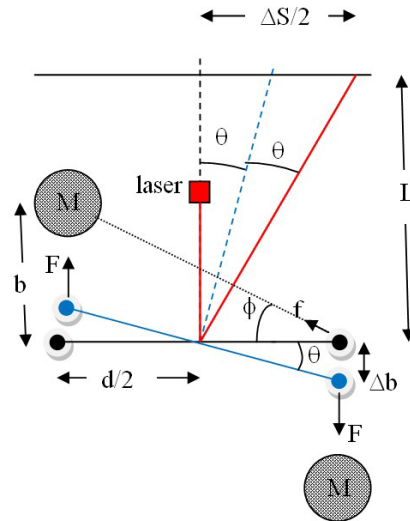
B.7 La prise en compte du déplacement modifie aussi la dynamique du pendule de torsion. Montrer en linéarisant le théorème du moment cinétique au premier ordre en $\varepsilon = \theta - \theta_e$, que $\varepsilon(t)$ vérifie désormais l'équation différentielle suivante

$$J\ddot{\varepsilon} = -\alpha\dot{\varepsilon} - C'\varepsilon$$

où C' est une constante que l'on exprimera en fonction de C , b , d et θ_e . En déduire dans l'hypothèse où $\alpha \ll \sqrt{JC'}$, la nouvelle pulsation du régime pseudo-périodique.

B.8 Donner la nouvelle relation entre G et L , ΔS , M , r , d , b et ω . Calculer numériquement G . Qu'en concluez-vous ?

Une deuxième cause d'erreur systématique est l'oubli de la force gravitationnelle $\vec{f}$ (voir figure ci-dessous) qu'exerce sur une petite sphère la deuxième grande sphère (la plus éloignée).



B.9 Exprimer le moment de $\vec{f}$ en fonction de f et de l'angle Φ (défini sur la figure ci-dessus). Estimer ce moment lorsque la petite sphère est toujours dans sa position initiale au repos et comparer au moment de $\vec{F}$. Montrer que le ratio de ces moments ne dépend que de b et de d et le calculer numériquement. Est-ce que la prise en compte de cet effet permettra selon vous de corriger suffisamment l'estimation de la valeur de G ?