

Problème 1 : Découverte de Proxima du Centaure

I. Première observation de l'étoile

L'étoile *Proxima Centauri* a été découverte en 1915 par l'astronome britannique Robert Innes, alors directeur de l'observatoire de l'Union à Johannesburg en Afrique du Sud. C'est une étoile de type naine rouge, de masse $M_E = 2,4 \cdot 10^{29}$ kg et de rayon $R_E = 9,8 \cdot 10^4$ km. Elle est située à $D_E = 4,0 \cdot 10^{13}$ km soit 4,2 années-lumière du Soleil.

Dans la suite du sujet, toutes les applications numériques seront faites à la longueur d'onde moyenne du visible $\lambda_{obs} = 600$ nm.

1) Justifier que la distance entre la Terre et Proxima du Centaure peut-être approximée à 4,2 années-lumière du Soleil.

Pour voir l'étoile *Proxima Centauri*, un instrument d'optique est utilisé. Il est modélisé dans la suite par deux lentilles :

- Une lentille convergente L_1 objectif, de centre optique O_1 de foyer principal objet F_1 et de foyer principal image F_1' , de distance focale image $f_1' = 8,0$ m.
- Une lentille divergente L_2 de projection, de centre optique O_2 de foyer principal objet F_2 et de foyer principal image F_2' , de distance focale image $f_2' = -0,020$ m.

Si le point objet A et le point image A' sont conjugués par la lentille L de focale f' et de centre O , d'après la formule de Descartes on a :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

et le grandissement transversal est :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$

L'instrument d'optique est pointé vers l'étoile *Proxima Centauri*.

2) Où est située l'image de l'étoile par la lentille L_1 , appelée image intermédiaire A_1B_1 ? Illustrer cette situation par un schéma.

3) Déterminer l'expression de la taille de cette image intermédiaire A_1B_1 (non algébrique) en fonction des données.

4) La lentille de projection L_2 , divergente, sert à faire de l'image intermédiaire A_1B_1 une image définitive $A'B'$, réelle, non inversée et agrandie d'un facteur 4,0. On note γ_2 le grandissement de la lentille L_2 . Exprimer la distance $\overline{O_2A_1}$ en fonction de γ_2 et de f_2' . Calculer $\overline{O_2A_1}$ et commenter le résultat.

5) Illustrer par un schéma la position de A_1B_1 , de $A'B'$ et de L_2 (sans représenter L_1).

6) En 1915, l'image définitive $A'B'$ de l'étoile se formait sur une plaque photographique de dimension 24 mm \times 36 mm, composée de cristaux de 10 μ m de chlorure d'argent, précipité blanc qui noircit à la lumière. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur la plaque photo ?

7) A l'occasion du centenaire de la découverte de Proxima du Centaure, en 2015, la photo de l'étoile a été reprise avec l'instrument d'optique de l'époque mais la plaque photographique a été remplacée par un capteur CCD (Charge Coupled Device) de 100 millions de pixels, de taille identique à la plaque photo originelle. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur le capteur photosensible ?

8) L'efficacité quantique QE d'un capteur CCD donne le taux de transformation de la lumière en charge, soit la probabilité qu'un photon incident donne « naissance » à un électron dans le capteur. Pour la longueur d'onde étudiée, cette sensibilité quantique QE est de 30 %.

-a- Sachant que la puissance surfacique reçue sur la Terre par le Soleil dans le visible est de $p_S(So) = 600$ W.m⁻² et que la lentille d'entrée de l'instrument est de diamètre $D_1 = 50$ cm, en faisant

l'hypothèse que la puissance lumineuse du Soleil P_{So} soit identique à celle de Proxima du Centaure P_{PC} , montrer que la puissance lumineuse reçue par le système optique, issue de l'étoile *Proxima Centauri* est donnée par :

$$P = \pi \cdot p_S(So) \cdot \left(\frac{D_{TS}}{D_E}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_1}{2}\right)^2$$

- b- Déterminer l'énergie lumineuse résultante pour une exposition d'une durée $\Delta t = 12$ mn.
 - c- Combien d'électron seront effectivement émis par le capteur pendant cette durée d'exposition ?
 - d- Quelle est la charge produite par le capteur ?
- 9) La diffraction par la lentille d'entrée L_1 est-elle gênante pour les observations ? Justifier.

II. Mesure de la distance entre la Terre et l'étoile

La parallaxe est l'effet du changement de position de l'observateur sur ce qu'il perçoit. La parallaxe annuelle est, par définition, l'angle qui mesure le déplacement, au cours de l'année, de la position apparente, perçue depuis la Terre, d'une étoile proche par rapport aux étoiles lointaines (cf figure ci-dessous).

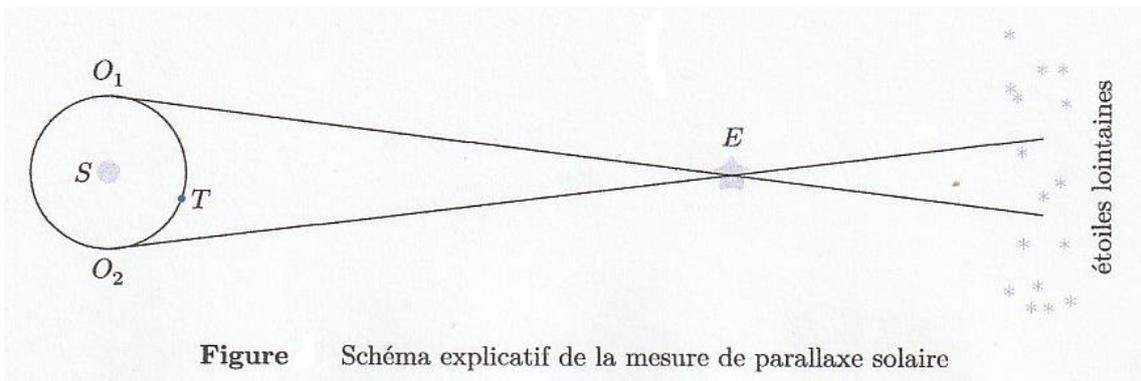


Figure Schéma explicatif de la mesure de parallaxe solaire

Sur la figure, deux instants d'observation sont représentés par O_1 et O_2 . Le satellite Hipparcos (High Precision Parallax Collection Satellite) a mesuré la parallaxe de $P_E = 1545$ millisecondes d'arc pour *Proxima Centauri*. On rappelle que une seconde d'arc est égal à $1/3600$ degré.

10) Calculer, à partir de cette valeur de la parallaxe P_E , la distance séparant l'étoile *Proxima Centauri* du système solaire et comparer à la valeur donnée au début de cette partie.

Données :

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de Planck : $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Distance Terre-Soleil : $D_{TS} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$

Surface d'une sphère de rayon R : $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

Surface d'un disque de rayon r : $s = \pi \cdot r^2$

Problème 2 : Optique d'un appareil photo

Les images sont omniprésentes dans l'environnement et il peut sembler qu'elles l'ont toujours été. C'est pourtant loin d'être le cas. Longtemps le dessin et la peinture furent les seuls moyens utilisés pour représenter la réalité sur un support à deux dimensions et ce n'est qu'au XIX^e siècle qu'un procédé technique permit de "capturer" des images.

Partie I - Optique de l'appareil photo

La date conventionnelle de l'invention de la photographie a été fixée au 7 janvier 1839, date à laquelle Arago présenta à l'Académie des Sciences l'invention de Daguerre : le daguerréotype. Mais l'histoire de la photographie commence bien avant notamment avec la camera obscura (chambre noire) qui est utilisée dès le XVI^e siècle pour des travaux topographiques. Les historiens de l'art ont également montré qu'elle était utilisée par des peintres, comme Vermeer ou les frères Van Eyck.

Le fonctionnement de cet ancêtre de l'appareil photo repose sur les propriétés des lentilles.

I.1 - Objet et image

On modélise un appareil photo (**figure 1**) par l'association d'une lentille mince (L) de focale $f' = \overline{OF'}$ appelée "objectif", d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille.

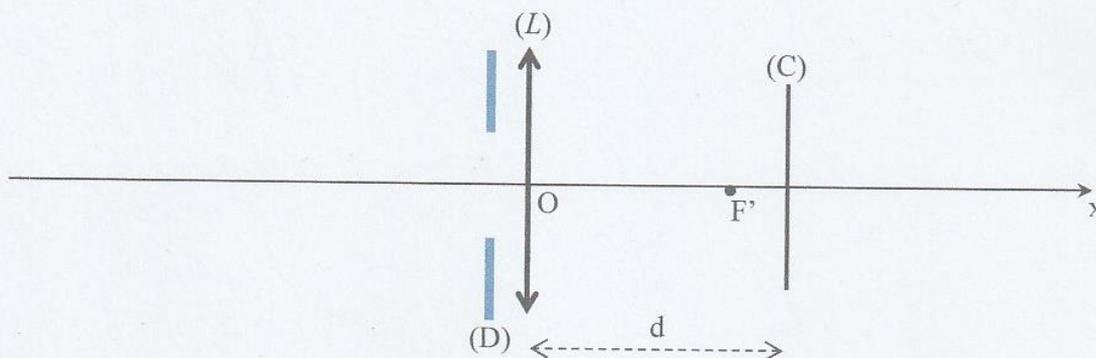


Figure 1 - Modélisation d'un appareil photo

La distance d entre la lentille (L) et le capteur (C) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif ; elle est comprise entre d_{\min} et d_{\max} .

À l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur h situé à une distance L devant l'objectif.

- Q1. a) La lentille mince est utilisée dans les "conditions de Gauss". Préciser en quoi elles consistent.
b) Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?

- Q2. a)** Faire un schéma soigné de la situation en notant AB l'objet et A'B' son image sur le capteur (A est sur l'axe et AB appartient à un plan orthogonal à l'axe). Positionner les foyers principaux et tracer au moins deux rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image A'B'.
- b)** Exprimer la taille $\overline{A'B'}$ de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de h, f' et L. Calculer cette taille avec f' = 50 mm, h = 5 m et L = 20 m.

Rappel : l'objet AB et l'image A'B' donnée par la lentille mince de centre O et de foyers principaux F (objet) et F' (image) dans les conditions de Gauss sont liés par les relations :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad ; \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad ; \quad \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -(\overline{OF'})^2 \quad ; \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} .$$

- Q3. a)** Quelle est la valeur de d lorsque l'objet est à l'infini ?
- b)** Montrer qu'il existe une distance limite notée L_{\min} en dessous de laquelle il ne sera pas possible d'obtenir une image sur le capteur, alors que ce serait toujours possible pour des valeurs supérieures à L_{\min} .
- c)** Exprimer L_{\min} en fonction de f' et d_{\max} .
- d)** Calculer L_{\min} pour f' = 50 mm et $d_{\max} = 55$ mm.

I.2 - Influence de la focale

On souhaite obtenir une image de l'arbre sur le capteur plus grande sans changer de place (donc en gardant la même valeur pour L). On change donc l'objectif et on le remplace par un objectif de focale $f'_1 = 100$ mm. La distance d est toujours réglable mais les valeurs d_{\min} et d_{\max} sont différentes des valeurs de **Q3**.

- Q4. a)** Quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ?
- b)** Si on suppose que le capteur a pour dimensions : 24 mm × 36 mm, sera-t-il possible de voir l'arbre en entier sur la photo obtenue ?

Remarque : pour **Q5** et **Q6**, des approximations justifiées seront à faire.

- Q5.** L'objectif utilisé est appelé "téléobjectif" ou "objectif de longue focale". Sur un site internet dédié à la photographie, on peut lire que ce genre d'objectif "rapproche les objets". Commenter cette phrase en indiquant la part de vérité ou d'inexactitude qu'elle contient. Un raisonnement et un calcul numérique sont attendus (en utilisant une approximation justifiée).

On souhaite maintenant réaliser un téléobjectif en utilisant deux lentilles : une lentille (L_1) convergente et une lentille (L_2) divergente, séparées par une distance e. La distance L entre (L_1) et l'arbre n'a pas changé.

- Q6.** La lentille (L_1), de focale f'_1 , donne de l'arbre AB une image intermédiaire A_1B_1 qui joue le rôle d'objet pour la lentille (L_2), de focale f'_2 , qui en donne une image finale A'B'.
- a)** Exprimer la distance $\overline{O_2A_1}$ en fonction de f'_1 et e (en utilisant une approximation justifiée).
- b)** L'image A'B' doit être réelle. En déduire que la distance e entre les centres des deux lentilles doit être située dans une plage de valeurs bien précise. Exprimer cette condition sur e sous la forme d'une double inégalité sur e, f'_1 et f'_2 (en utilisant une approximation justifiée).
- c)** Vérifier que cette condition est réalisée avec $f'_1 = 10$ cm, $f'_2 = -5$ cm et e = 8 cm.

- Q7.** Avec les valeurs numériques de **Q6c** :
- Calculer la distance d ,
 - Calculer la taille de l'image $A'B'$ de l'arbre sur le capteur.
 - Indiquer si ce téléobjectif est équivalent à l'objectif de **Q4**.

I.3 - Exploitation d'une photo

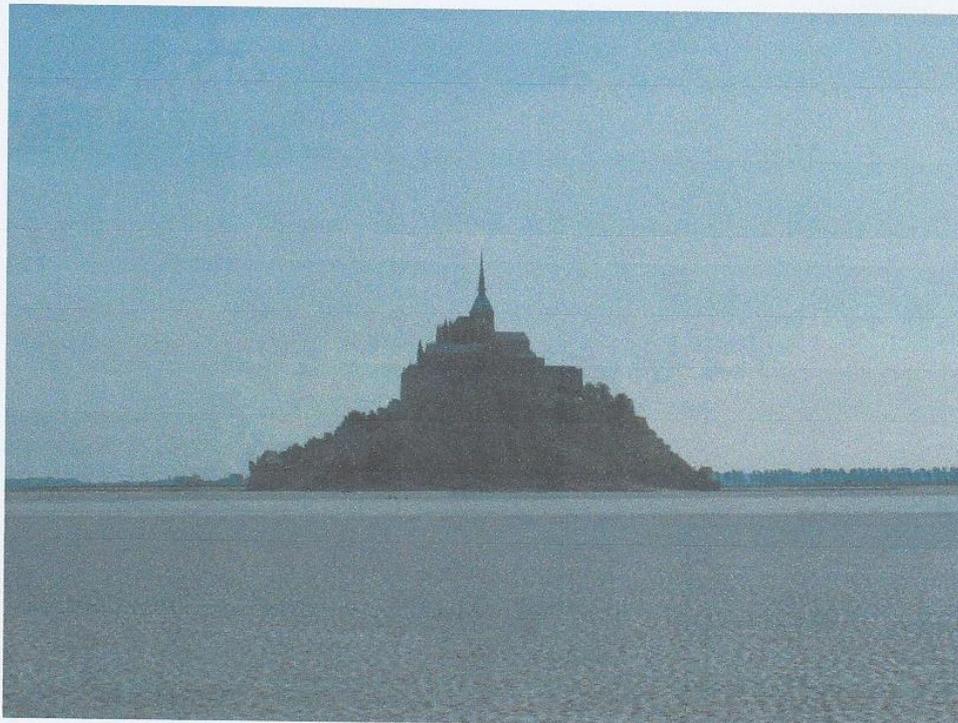
Les tailles des capteurs dont sont équipés les appareils numériques actuels sont variables, comme l'indique le **document 1**.

Document 1 - Exemples de capteurs d'appareils photo numériques

Standard Diagonale	Dimensions	Exemples
1/2,5"	7,18 mm	4,29x5,76 mm Panasonic TZ6
1/2,3"	7,7 mm	4,62x6,16 mm Nikon P90, Canon 110 IS
1/2"	8 mm	4,8x6,4 mm Fuji F70EXR
1/1,7"	9,5 mm	5,7x7,6 mm Canon G10
1/1,6"	10 mm	6x8 mm Fuji S200EXR
4/3"	21,6 mm	13x17,3 mm reflex 4/3 et hybrides Micro 4/3
APS	24,8 mm	13,8x20,7 mm (Sigma)
	à 28,4 mm	à 15,8x23,6 mm (Nikon, Sony)
24x36	43,3 mm	24x36 mm Nikon D700, Sony Alpha 900

Source : *Wikipedia*

La photo ci-dessous a été prise avec un appareil photo numérique de type "Canon G10". Les informations relatives à la photo sont consignées dans le **document 2**.



Il s'agit d'une photo prise dans la baie du Mont Saint-Michel (au point B sur la carte satellite du **document 3**). La distance BC vaut 1,46 km.

Document 2 - Informations relatives à la prise de vue (Photo Mont Saint-Michel)

Sensibilité : 100 ISO
 Vitesse : 1/250 s
 Ouverture : f/7,1
 Focale : 18 mm

Document 3 - Image satellite de la baie du Mont Saint-Michel



A : Bec d'Andaine

B : lieu de la prise de vue

C : Mont Saint-Michel

Q8. À partir de la photo obtenue et des **documents 1, 2 et 3**, déterminer la hauteur du Mont Saint-Michel (flèche comprise) en indiquant les hypothèses posées, la modélisation du problème (par exemple par un schéma légendé) et les calculs effectués.

I.4 - Comment expliquer les propriétés des lentilles ?

Les propriétés optiques des lentilles viennent de leur forme géométrique.

Pour en proposer une explication, on considère une lentille plan-convexe (**figure 2**) constituée d'un verre d'indice n . L'indice de l'air ambiant est égal à 1.

La partie sphérique de la lentille est une portion de sphère de centre C et de rayon $R = CB$. L'épaisseur de la lentille au centre est $e = OS$.

On considère un rayon incident parallèle à l'axe optique, à une distance h de celui-ci. Ce rayon pénètre dans la lentille en A et est réfracté en B. On note i et r les angles incident et réfracté, comptés par rapport à la normale (CB). Le rayon émergent de la lentille coupe l'axe optique en F'. On note K le projeté orthogonal de B sur l'axe optique.

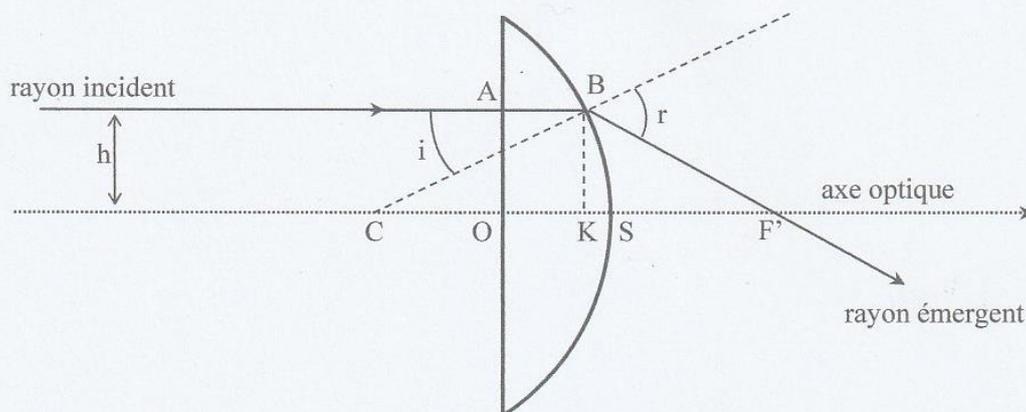


Figure 2 - Lentille plan-convexe

Q9. a) Écrire la loi de la réfraction en B.

b) Montrer que la distance OF' peut se mettre sous la forme :

$$OF' = e - R[1 - \cos(i)] + \frac{R \sin(i)}{\tan(r - i)}.$$

Q10. a) La lentille constitue-t-elle un système rigoureusement stigmatique ?

b) Si on considère une lentille mince (e faible devant R) et des rayons paraxiaux, peut-on dire que le système est approximativement stigmatique ? Justifier.

c) Dans le cas de la lentille mince, donner une expression approchée de la distance OF' .

Q11. On suppose que cette lentille possède les propriétés des lentilles minces utilisées dans les conditions de Gauss, que F' est son foyer principal image et O est son centre optique. On considère le rayon qui coïncide avec l'axe et qui n'est donc pas dévié par la lentille.

a) Exprimer le chemin optique (OSF') en fonction de e , n et r .

b) En justifiant par un théorème (à citer), quelle relation existe-t-il entre le chemin optique (ABF') et le chemin optique (OSF') ?

Partie II - La lumière

Le contrôle de la lumière qui pénètre dans l'appareil photo est essentiel, qu'il soit argentique ou numérique.

II.1 - Réglage de différents paramètres lors d'une prise de vue

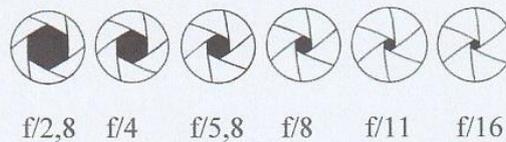
Le **document 4** indique les différents réglages en mode manuel (en mode automatique, les réglages sont déjà faits par défaut) pour obtenir une bonne exposition.

Document 4 - Réglages de l'exposition d'une photo

L'exposition est un paramètre technique important pour la réussite d'une photo. Elle caractérise en quelque sorte l'action de la lumière sur le capteur. Si l'exposition est trop faible, l'image obtenue sera sombre (sous-exposée) ; à l'inverse, une surexposition produira une image trop claire.

L'exposition est choisie en fonction de la scène à photographier (intérieur, extérieur, etc.) et peut être contrôlée par trois paramètres.

- La sensibilité ISO correspond à la sensibilité à la lumière du capteur (ou de la pellicule) ; elle varie en général entre 100 (faible sensibilité) et 3 200 (grande sensibilité). Une sensibilité deux fois plus grande correspond donc à un capteur deux fois plus sensible. Il est préférable d'utiliser une sensibilité faible car les hautes sensibilités augmentent le bruit, ce qui détériore le résultat.
- La vitesse d'obturation représente la durée pendant laquelle l'obturateur reste ouvert. Elle est en général comprise entre 1 s et 1/250 s. Une faible vitesse peut entraîner des phénomènes de " bougé " si la scène est en mouvement.
- L'ouverture du diaphragme correspond à la taille du disque qui laisse passer la lumière quand l'obturateur est ouvert. Elle est indiquée par une notation f/x, où x est appelé " nombre d'ouverture ". Voici quelques valeurs de l'ouverture :

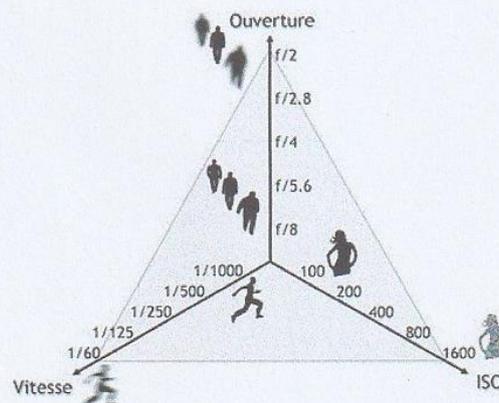


Lorsqu'on passe d'une valeur à l'autre (de la gauche vers la droite) on divise par 2 la surface d'ouverture du diaphragme. L'ouverture modifie également la profondeur de champ : une plus faible ouverture permet d'obtenir une plus grande profondeur de champ.

Source : d'après apprendre-la-photo.fr

Document 5 - Le triangle de l'exposition

On résume souvent l'exposition d'une photo par le " triangle d'exposition " :



L'exposition est représentée par la surface du triangle.

Source : apprendre-la-photo.fr

Q12. Un photographe amateur effectue une prise de vue (un portrait d'une personne immobile) en extérieur avec les réglages suivants : (ISO : 100 / vitesse : 1/250 s / ouverture : f/8). Il l'estime correctement exposée et souhaite en effectuer une autre avec la même exposition, en conservant la même sensibilité, mais avec une ouverture f/4. Répondre aux questions suivantes en justifiant les réponses à l'aide des **documents 4 et 5**.

- a) Quelle vitesse d'obturation doit-il choisir ?
- b) Ce nouveau réglage va-t-il permettre d'augmenter ou diminuer la profondeur de champ ?
- c) Si la personne bouge un peu durant la prise de vue, y a-t-il un risque plus grand, en comparaison avec la première photographie, que l'image obtenue soit floue ?

II.2 - Modèle corpusculaire

Une composante monochromatique de fréquence ν de la lumière peut être modélisée également par un flux de photons se déplaçant avec une célérité c .

Q13. Donner l'expression de l'énergie de chacun de ces photons en précisant la signification et les unités des termes utilisés.

Donnée : une ouverture f/8 correspond à un diamètre d'ouverture (sensiblement circulaire) du diaphragme de 5 mm dans les conditions de cette prise de vue.

Q14. Si on considère une prise de vue avec les réglages (ISO : 100 ; vitesse : 1/500 s ; ouverture : f/8), estimer le nombre de photons qui pénètrent dans l'appareil durant l'ouverture de l'obturateur si on considère un éclairement solaire moyen de $700 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Pour cette question, on admet qu'il est équivalent de considérer que la lumière solaire est monochromatique, de fréquence $\nu = 5,0 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.