

Problème 1 : Découverte de Proxima du Centaure 4 (Extrait Concours Centrale-Supélec MP-20).

I. Première observation de l'étoile

1) L'année lumière (unité très utilisée en astronomie, notée $a.L$) est égale à la distance parcourue par la lumière (dans le vide) en une année : $1 a.L = 3,0 \cdot 10^8 \cdot (365.24.3600) = 9,5 \cdot 10^{15} m$. En explicitant :

$$D_E = \frac{4,0 \cdot 10^{16}}{9,5 \cdot 10^{15}} = 4,2 a.L$$

2) La lentille objectif L_1 conjugue le point A au point A_1 . Appliquons la relation de conjugaison de Descartes à L_1 :

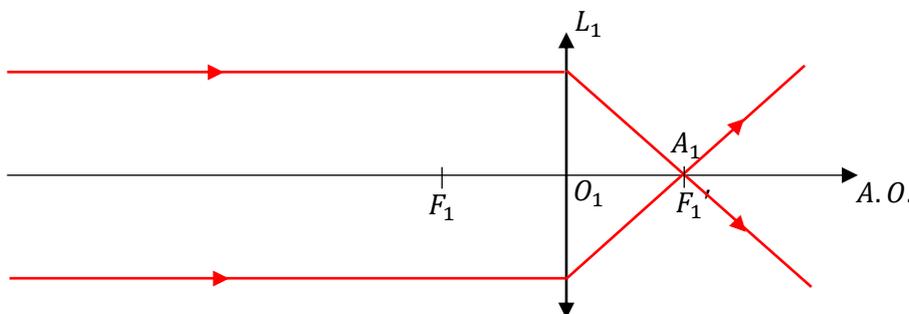
$$\frac{1}{\overline{O_1 A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{\overline{O_1 F_1'}}$$

L'objet A est l'étoile *Proxima Centauri* située à grande distance de la Terre. On fait l'hypothèse que l'objet est à l'infini : $A(\infty)$. On en déduit que :

$$\frac{1}{\overline{O_1 A_1}} - \frac{1}{\cancel{\overline{O_1 A}}} = \frac{1}{\overline{O_1 F_1'}}$$

$$\overline{O_1 A_1} \sim \overline{O_1 F_1'} \text{ et } A_1 \sim F_1'$$

L'image de l'étoile *Proxima Centauri* est dans le plan focal image de la lentille L_1 . Schéma :



3) On note γ_1 le grandissement algébrique de la lentille L_1 . En explicitant :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}}$$

On établit ainsi que :

$$A_1 B_1 = AB \cdot \left(\frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} \right)$$

Avec $AB = 2 \cdot R_E$; $\overline{O_1 A_1} = f_1'$ et $\overline{O_1 A} = D_E$; en explicitant :

$$A_1 B_1 = 2 \cdot R_E \cdot \left(\frac{f_1'}{D_E} \right)$$

A.N. : $A_1 B_1 = 3,9 \cdot 10^{-8} m = 39 nm$

4) La lentille oculaire L_2 conjugue le point A_1 au point A' . Appliquons la relation de conjugaison de Descartes à L_2 :

$$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{O_2F_2'}$$

En notant γ_2 le grandissement transversal de L_2 :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}$$

On en déduit que :

$$\overline{O_2A'} = \gamma_2 \cdot \overline{O_2A_1}$$

En explicitant :

$$\frac{1}{\gamma_2 \cdot \overline{O_2A_1}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2A_1}} \left(\frac{1}{\gamma_2} - 1 \right) = \frac{1}{\overline{O_2F_2'}}$$

Soit :

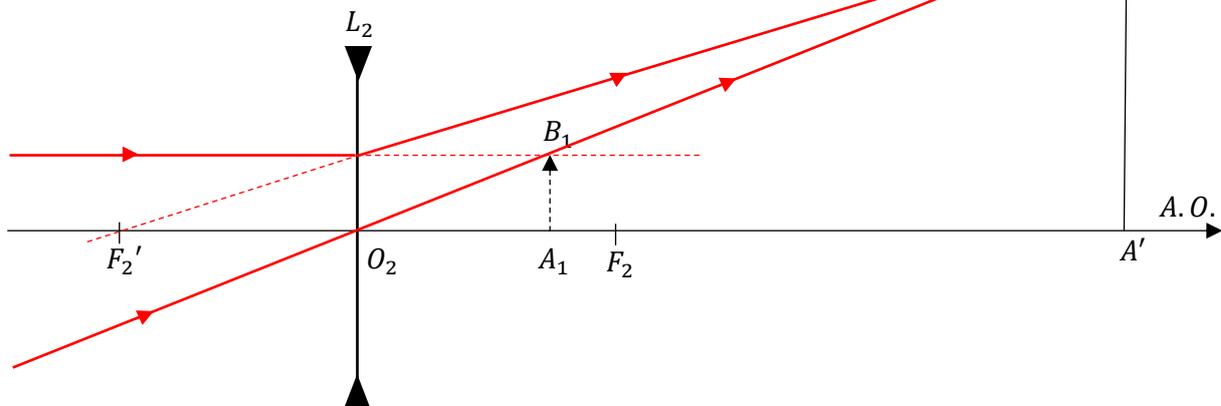
$$\overline{O_2A_1} = \left(\frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2} \right) \cdot \overline{O_2F_2'}$$

Avec $A_1 \sim F_1'$:

$$\overline{O_2F_1'} = \left(\frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2} \right) \cdot \overline{O_2F_2'}$$

A.N. : $\overline{O_2F_1'} = 1,5 \text{ cm}$. On vérifie que l'objet A_1B_1 de L_2 est virtuel, condition nécessaire pour que l'image finale $A'B'$ par L_2 (lentille divergente) soit réelle (cf TP d'optique).

5) Schéma :



On vérifie que l'image est droite et que le grandissement $\gamma_2 = 4,0$.

6) Avec un grandissement $\gamma_2 = 4,0$ la dimension de l'image sur la plaque photographique est :

$$A'B' = \gamma_2 \cdot A_1B_1 = 0,16 \mu\text{m}$$

On constate que la dimension de l'image de l'étoile *Proxima Centauri* est inférieure à celle d'un cristal de chlorure d'argent donc cette **image est ponctuelle** sur la plaque photographique.

7) Notons S la surface du capteur CCD : $S = 24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm} = 100$ millions pixels. La surface d'un pixel est donc : $s = 8,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$. Si on assimile un pixel à un carré de côté a :

$$a = \sqrt{s} = 2,9 \mu\text{m}$$

On constate que $A'B' < a$ donc l'image de l'étoile *Proxima Centauri* est également ponctuelle sur le capteur CCD.

8-a) Par définition, la puissance surfacique est la puissance par unité de surface. L'émission lumineuse étant radiale, à la distance r d'une étoile, la puissance lumineuse est donnée par :

$$P_{ét} = p_s(ét). 4. \pi. r^2$$

avec $P_{ét}$ puissance lumineuse de l'étoile, $p_s(ét)$ la puissance surfacique de l'étoile et $4. \pi. r^2$ surface d'une sphère de rayon r .

Exprimons la puissance lumineuse émise par le Soleil et l'étoile *Proxima Centauri* « sur la Terre » :

$$P_{So} = p_s(So). 4. \pi. D_{TS}^2$$

$$P_{PC} = p_s(PC). 4. \pi. D_E^2$$

En faisant l'hypothèse que la puissance lumineuse du Soleil est égale à la puissance lumineuse de l'étoile *Proxima Centauri* on peut poser que :

$$p_s(PC). 4. \pi. D_E^2 = p_s(So). 4. \pi. D_{TS}^2$$

On en déduit que :

$$p_s(PC) = p_s(So). \left(\frac{D_{TS}}{D_E}\right)^2$$

La puissance lumineuse issue de *Proxima Centauri* reçue par le système optique est donc :

$$P = p_s(PC). \pi. \left(\frac{D_1}{2}\right)^2$$

avec $s = \pi. \left(\frac{D_1}{2}\right)^2$ surface de la lentille d'entrée de l'objectif.

En explicitant, on vérifie que :

$$P = \pi. p_s(So). \left(\frac{D_{TS}}{D_E}\right)^2 . \left(\frac{D_1}{2}\right)^2$$

8-b) L'énergie lumineuse est :

$$E = P. \Delta t$$

En explicitant :

$$E = \pi. p_s(So). \left(\frac{D_{TS}}{D_E}\right)^2 . \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 . \Delta t$$

A.N. : $E = 1,2. 10^{-6}$ J.

8-c) L'énergie d'un photon de longueur d'onde λ_{obs} est donnée par la formule de Planck-Einstein :

$$E_{ph} = \frac{h. c}{\lambda_{obs}}$$

Déterminons le nombre de photon N_{ph} reçu par le système optique pendant l'intervalle de temps Δt :

$$N_{ph} = \frac{E}{E_{ph}}$$

En explicitant :

$$N_{ph} = \frac{\pi. p_s(So). \left(\frac{D_{TS}}{D_E}\right)^2 . \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 . \Delta t. \lambda_{obs}}{h. c}$$

Sachant que l'efficacité quantique du capteur CCD est QE, on en déduit le nombre d'électrons émis par le capteur :

$$N_{e^-} = QE \cdot N_{ph}$$

En explicitant :

$$N_{e^-} = \frac{\pi \cdot p_s(So) \cdot \left(\frac{D_{TS}}{D_E}\right)^2 \cdot \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 \cdot \Delta t \cdot \lambda_{obs} \cdot QE}{h \cdot c}$$

A.N. : $N_{e^-} = 1,1 \cdot 10^{12}$ électrons.

8-d) Sachant que la charge d'un électron est $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, la charge produite par le capteur est :

$$Q = N_{e^-} \cdot q = -1,7 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

9) On vérifie que $\lambda_{obs} \ll D_1$ donc **les effets de la diffraction sont négligeables.**

II. Mesure de la distance entre la Terre et l'étoile

10) A partir de la figure proposée :

$$\tan P_E = \frac{O_1 O_2}{SE} = \frac{2 \cdot D_{TS}}{D_E}$$

Dans l'hypothèse des petits angles :

$$\tan P_E = P_E(\text{rad})$$

On établit ainsi que :

$$D_E = \frac{2 \cdot D_{TS}}{P_E(\text{rad})}$$

A.N. : explicitons $P_E(\text{rad})$ puis calculons D_E :

$$P_E(\text{rad}) = 1545 \cdot 10^{-3}'' = 1545 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{60 \times 60}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$D_E = 4,0 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

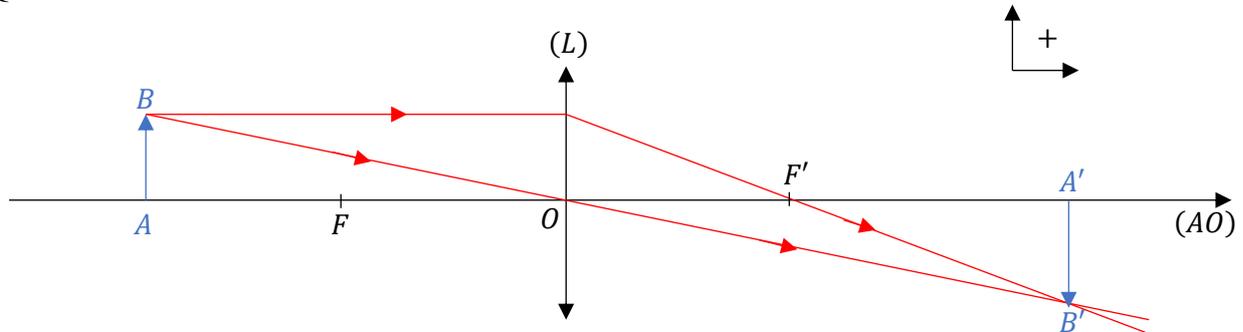
Ce résultat est en accord avec la valeur donnée dans l'énoncé.

Problème 2 : Optique d'un appareil photo

Q1.a- On considère qu'un système optique est utilisé dans les conditions de Gauss quand les rayons sont **peu inclinés** et **peu écartés** par rapport à l'axe optique du système.

Q1.b- Dans l'appareil c'est le diaphragme qui permet de se placer dans les conditions de Gauss.

Q2.a- Schéma de la situation :



Q2.b- Grandissement de la lentille :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

On en déduit que :

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \left(\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \right)$$

Appliquons la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

En posant $\overline{OA} = -L$:

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{L}$$

On établit que :

$$\overline{OA'} = d = \frac{f' \cdot L}{L - f'} \quad \text{et} \quad \overline{A'B'} = -\frac{h \cdot f'}{L - f'}$$

A.N. : $d = f' = 50 \text{ mm}$.

Rq. : Avec $L \gg f'$ on peut faire l'hypothèse que l'objet est à l'infini... on vérifie que l'image est dans le plan focal image de la lentille : $\overline{A'B'} = -12,5 \text{ mm}$.

Q3.a- Quand l'objet est à l'infini (cf situation ci-dessus) : $\overline{OA'} = d = f'$.

Q3.b-c- Posons $A \xrightarrow{L} A'$ et appliquons la relation de conjugaison de Descartes à la lentille :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

Posons $\overline{OA} = -L$ et $\overline{OA'} = d$ et exprimons $1/L$ en fonction de $1/d$ et $1/f'$:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{d}$$

A partir de cette expression, on peut justifier que $1/L$ est maximal (donc L_{min}) quand $1/d$ est minimal (donc d_{max}). Exprimons L_{min} :

$$L_{min} = \frac{f' \cdot d_{max}}{d_{max} - f'}$$

Q3.d- Application numérique : $L_{min} = 55 \text{ cm}$.

Q4.a- De la même manière que dans la question Q2.b- on établit que :

$$\overline{A'B'} = -\frac{h \cdot f'_1}{L - f'_1}$$

A.N. : $\overline{A'B'} = -25,1 \text{ mm}$

Q4.b- Compte tenu de la dimension de $\overline{A'B'}$ il est possible de voir l'arbre en entier en « mode portrait » c.à.d en orientant le boîtier de l'appareil photo verticalement.

Q5. Revenons sur l'expression de $\overline{A'B'}$ pour $L \gg f'_1$ (hypothèse vérifiée pour les valeurs proposées ici) :

$$\overline{A'B'} = -\frac{h \cdot f'_1}{L - f'_1} = -\frac{h \cdot f'_1}{L}$$

On constate que la dimension de l'image sur l'écran est proportionnelle à f'_1 et à $1/L$. Par exemple :

- Pour $L = 20 \text{ m}$: pour $f'_1 = 100 \text{ mm}$, $\overline{A'B'} = -25,1 \text{ mm}$
- Pour $L = 10 \text{ m}$: pour $f' = 50 \text{ mm}$, $\overline{A'B'} = -25,1 \text{ mm}$

Ceci justifie la raison pour laquelle on dit que « augmenter la distance focale » est équivalent à « rapprocher les objets ».

Q6.a- Posons : $A \rightarrow A_1 \rightarrow A'$. En faisant l'hypothèse que $L \gg f'_1$ (ce qui est équivalent à supposer que l'objet est à l'infini) : $A_1 \sim F'_1$. Dans ce cas :

$$\overline{O_1A_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1} = \overline{O_1F'_1}$$

On en déduit que :

$$\overline{O_2A_1} = f'_1 - e$$

Q6.b- Par construction (cf pb 1, question 5) on vérifie que l'image $A'B'$ par la lentille L_2 divergente est réelle si son objet A_1B_1 est virtuel et situé entre O_2 et F_2 (cf TP d'optique). Il faut donc que :

$$0 < \overline{O_2A_1} < f_2$$

En explicitant $\overline{O_2A_1}$ et en posant que $f_2 = -f'_2$: $0 < f'_1 - e < -f'_2$

On établit la condition cherchée :

$$f'_1 + f'_2 < e < f'_1$$

Q6.c- A.N : $f'_1 = 10 \text{ cm}$ et $f'_1 + f'_2 = 5,0 \text{ cm}$. Avec $e = 8,0 \text{ cm}$ on vérifie que $f'_1 + f'_2 < e < f'_1$.

Q7.a- Appliquons la relation de conjugaison à la lentille L_2 :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F'_2}}$$

On établit que :

$$\overline{O_2A'} = \frac{\overline{O_2A_1} \cdot \overline{O_2F'_2}}{\overline{O_2F'_2} + \overline{O_2A_1}}$$

Posons $\overline{O_2A'} = d$, en explicitant :

$$d = \frac{(f'_1 - e) \cdot f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$$

A.N. : $d = 3,3 \text{ cm}$

Q7.b- Explicitons le grandissement du téléobjectif :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \left(\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \right) = \gamma_1 \cdot \gamma_2$$

Avec :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = -\frac{f'_1}{L} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{d}{f'_1 - e}$$

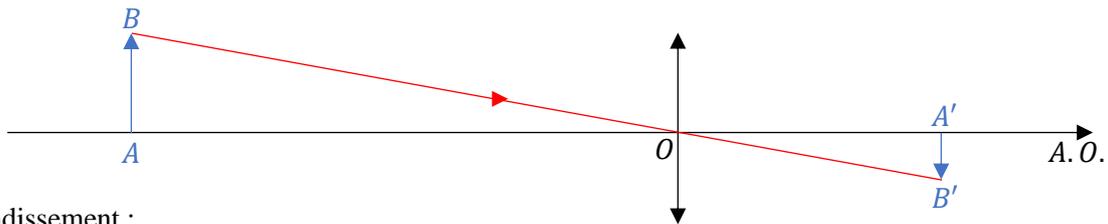
En posant que $\overline{AB} = h$, on établit que :

$$\overline{A'B'} = \frac{-h \cdot f'_1 \cdot d}{L \cdot (f'_1 - e)}$$

A.N. : $\overline{A'B'} = -4,1 \text{ cm}$

Q7.c- On constate que le téléobjectif est **plus performant** que l'objectif de la question Q.4) car l'image $\overline{A'B'}$ est plus grande.

Q8. Schéma synoptique de la situation :



Grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

On en déduit que :

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \cdot \left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \right)$$

Sachant que $\overline{OA} = -(BC) = -1,46 \text{ km} \gg f'$ on peut faire l'hypothèse que « l'objet est à grande distance » ce qui permet de poser que $\overline{OA'} = f' = 18 \text{ mm}$. A partir du document 1, on sait que la hauteur du capteur est de $5,7 \text{ mm}$. Par « un produit en croix » on en déduit que $\overline{A'B'} = -1,9 \text{ mm}$. On calcule la hauteur du Mont Saint Michel : $\overline{AB} = 1,6 \cdot 10^2 \text{ m}$.

Q9.a- Loi des sinus appliquée au point B : $n \cdot \sin i = \sin r$

Q9.b- Posons : $\overline{OF'} = \overline{OK} + \overline{KF'} = \overline{OS} - \overline{KS} + \overline{KF'}$ avec $\overline{OS} = e$ et $\overline{KS} = \overline{KC} + \overline{CS} = \overline{CS} - \overline{CK}$. $\overline{CS} = R$ et $\overline{CK} = R \cdot \cos i$ donc $\overline{KS} = R \cdot (1 - \cos i)$. Par construction : $\tan(r - i) = h / \overline{KF'}$ avec $h = R \cdot \sin i$ donc :

$$\overline{KF'} = \frac{R \cdot \sin i}{\tan(r - i)}$$

On vérifie que :

$$\overline{OF'} = e - R \cdot (1 - \cos i) + \frac{R \cdot \sin i}{\tan(r - i)}$$

Q10.a- On constate que **la lentille n'est pas rigoureusement stigmatique** puisque la position de $\overline{OF'}$ dépend de l'angle d'incidence i .

Q10.b-c- Dans l'hypothèse des petits angles : $\cos i = 1$; $\sin i = i$ et $\tan(i - r) = i - r$. L'expression précédente devient :

$$\overline{OF'} = e + \frac{R \cdot i}{r - i}$$

A partir de la relation des sinus appliquée en B pour de petits angles on établit que : $n \cdot i = r$:

$$\overline{OF'} = e + \frac{R \cdot i}{(n - 1) \cdot i} = e + \frac{R}{n - 1}$$

...avec $e \ll R$:

$$\overline{OF'} = \frac{R}{n - 1}$$

Dans ces conditions, la lentille est stigmatique (au sens approché du terme)

Q11.a- Posons $\overline{OF'} = \overline{OS} + \overline{SF'}$, on en déduit que :

$$\overline{SF'} = \overline{OF'} - \overline{OS} = \frac{R}{n - 1} - e$$

Le chemin optique étant défini comme étant le **produit de l'indice par la distance** :

$$(OSF') = (OS) + (SF') = n \cdot e + \left(\frac{R}{n - 1} - e \right)$$

Soit :

$$(OSF') = e \cdot (n - 1) + \frac{R}{n - 1}$$

Q11.b- Par application du théorème de Malus (cf prog spé) : $(ABF') = (OSF')$.

Q12.a- En passant d'un nombre d'ouverture $N_1 = f/8$ à $N_2 = f/4$ la surface d'exposition est multipliée par 4. Il faut donc divisée le temps d'exposition par 4. Il faut donc une vitesse d'obturation de 1/1000 pour une même exposition.

Q12.b- En augmentant l'ouverture, **la profondeur de champ diminue**.

Q12.c- Avec une vitesse d'obturation de 1/1000 il y a moins de risque que l'image soit floue.

Q13. Energie d'un photon : $E_{ph} = h \cdot \nu$ avec h constante de Planck et ν fréquence de l'onde.

Q14. L'énergie reçue par le capteur (notée E_{cp}) est donnée par :

$$E_{cp} = \mathcal{P} \cdot S \cdot \tau$$

avec \mathcal{P} puissance lumineuse surfacique ($700 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$), S surface éclairée (avec une ouverture $f/8$ le diamètre d'ouverture est $D = 5 \text{ mm}$) et τ temps d'exposition :

$$E_{cp} = \mathcal{P} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^2 \cdot \tau = N \cdot E_{ph}$$

En explicitant, on établit que le nombre de photon est :

$$N = \frac{\pi \cdot \mathcal{P} \cdot D^2 \cdot \tau}{4 \cdot h \cdot \nu}$$

$$\text{A.N. : } N = 8 \cdot 10^{13} \text{ photons}$$