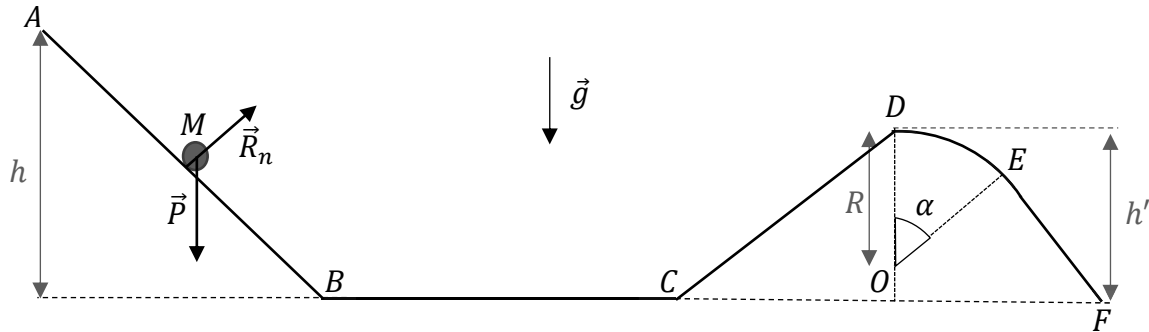


Exercice 1: Saut en ski sur une bosse...

1) On assimile le skieur à un point matériel M de masse m observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique à M dans le référentiel terrestre $dE_m = \delta W^{nc}$. M est soumis à son poids qui est une force conservative ainsi qu'à la réaction $\vec{R}_n$ qui ne travaille pas, on en déduit que $\delta W^{nc} = 0$ et donc que l'énergie mécanique du système est constante : $E_m(M) = \text{cte}$



2) Si on pose l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du point B, sachant que le skieur quitte le point A sans vitesse initiale :

$$E_m(A) = m \cdot g \cdot h$$

Au point B (respectivement au point C) l'énergie potentielle de pesanteur du point M est nulle :

$$E_m(B) = \frac{1}{2} m \cdot v^2(B)$$

Sachant l'énergie mécanique du skieur est constante, on peut poser que :

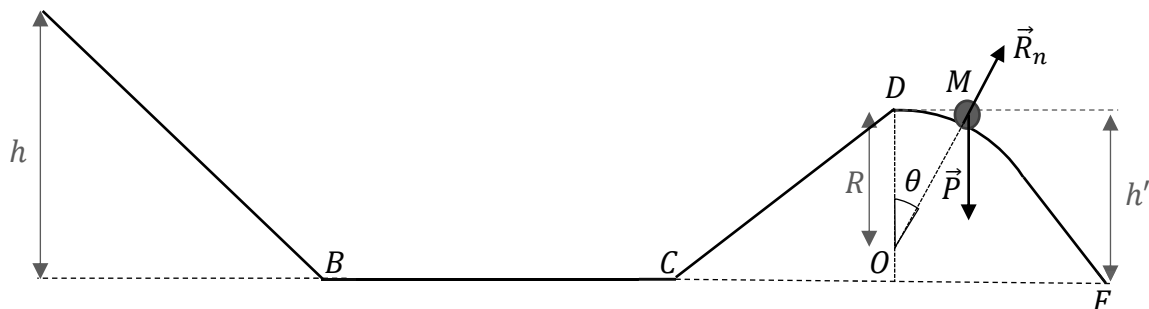
$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2(B) \quad \text{on en déduit que } v(B) = v(C) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Au point D, l'énergie mécanique du point M a pour expression :

$$E_m(D) = \frac{1}{2} m \cdot v^2(D) + m \cdot g \cdot h'$$

De la même manière, on établit que $v(D) = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h')}$

3) On note θ l'angle polaire permettant de repérer le skieur sur l'arc de cercle entre D et E.



Entre un point D et E , la hauteur du skieur est donnée par :

$$h(M) = h' - R.(1 - \cos \theta)$$

On vérifie que pour $\theta = 0$: $h(M) = h' = h(D)$. On établit l'expression de l'énergie mécanique du système en un point M quelconque situé entre D et E :

$$E_m(M) = \frac{1}{2}m.v^2(M) + m.g.(h' - R.(1 - \cos \theta))$$

4) Sachant que l'énergie mécanique est constante :

$$E_m(M) = \frac{1}{2}m.v^2(M) + m.g.(h' - R.(1 - \cos \theta)) = m.g.h$$

On vérifie que :

$$v(M) = \sqrt{2.g.(h - h') + 2.g.R.(1 - \cos \theta)}$$

5) Appliquons la deuxième loi de Newton au système en un point quelconque situé entre D et E :

$$m.\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{R}_n$$

En projetant dans la base de coordonnées polaires on établit les deux équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} -m.\left(\frac{v^2(M)}{R}\right) = -m.g.\cos \theta + R_n & (1) \\ m.R.\ddot{\theta} = m.g.\sin \theta & (2) \end{cases}$$

En explicitant $v^2(M)$ dans la relation (1) :

$$-\frac{m}{R}.(2.g.(h - h') + 2.g.R.(1 - \cos \theta)) = -m.g.\cos \theta + R_n$$

$$R_n = -\frac{2.m.g}{R}(h - h') - 2.mg + 3.m.g.\cos \theta$$

6) Le skieur « saute la bosse » dès que la réaction du support est nulle, c.à.d. pour $R_n(\theta_0) = 0$. En explicitant :

$$-\frac{2.m.g}{R}(h - h') - 2.mg + 3.m.g.\cos \theta_0 = 0$$

$$\cos \theta_0 = \frac{2}{3} + \frac{2.(h - h')}{3.R}$$

7) Pour que le skieur ait l'impression d'effectuer un saut, il faut que, à la limite $R_n(\alpha) = 0$, soit :

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} + \frac{2.(h_{min} - h')}{3.R}$$

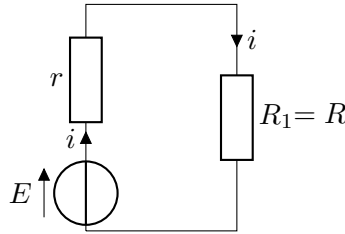
$$h_{min} = \frac{3.R}{2}\cos \alpha + h' - R$$

A.N. : $h_{min} = 5,9 \text{ m}$

Exercice 2 Guirlandes électriques

A Système de base

1. 1.a. Le schéma électrique équivalent est :



Dans ce circuit $i = i_1 = \frac{E}{R+r}$ car $i_2 = 0$. $\mathcal{P}_{1,o} = Ri_1^2$

$$\mathcal{P}_{1,o} = \frac{RE^2}{(r+R)^2}$$

- 1.b. Aucun courant ne circule dans la guirlande 2 : $\mathcal{P}_{2,o} = 0$.
2. 2.a. Les deux guirlandes étant branchées en parallèle, elles sont équivalentes à une unique résistance $R_{eq} = \frac{R}{2}$. Ainsi, l'intensité du courant i devient $i = \frac{E}{\frac{R}{2} + r}$. On exprime i_1 et i_2 à l'aide d'un pont diviseur de courant : $i_1 = i_2 = \frac{i}{2}$, $i_1 = i_2 = \frac{E}{R+2r}$

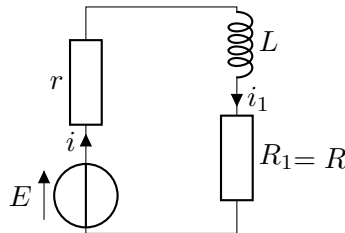
- 2.b. Ainsi :

$$\mathcal{P}_{1,f} = \mathcal{P}_{2,f} = \frac{RE^2}{(2r+R)^2}$$

3. On observe que $\mathcal{P}_{1,f} < \mathcal{P}_{1,o}$ car $2r+R > R+r$. Ainsi, à chaque modification de l'état de K , la guirlande 1 va subir une modification de la puissance qu'elle reçoit et donc la puissance lumineuse émise va elle aussi "clignoter".

B Système amélioré

1. 1.a. On raisonne sur le schéma électrique :



La loi des mailles s'écrit : $E = ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + Ri_1$ d'où

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R+r}{L}i_1 = \frac{E}{L}$$

On introduit le temps caractéristique $\tau_o = \frac{L}{R+r}$.

- 1.b. En régime permanent, $\frac{di_1}{dt} = 0$, on retrouve $i_{1p} = \frac{E}{R+r}$ soit la même valeur que dans le circuit étudié en A.1.
Remarque : on peut aussi raisonner à partir du circuit électrique équivalent en régime permanent : la bobine se comporte alors comme un fil.
2. 2.a. Cette fois-ci, il faut considérer les deux mailles. On a deux lois des mailles :

$$E = ri + L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 \quad (1) \quad \text{et} \quad E = ri + Ri_2 \quad (2)$$

et une loi des nœuds $i = i_1 + i_2$ (3). On combine (2) et (3) pour exprimer i en fonction de i_1 :

$$i = i_1 + \frac{E - ri}{R}$$

$$i = \frac{i_1 + \frac{E}{R}}{1 + \frac{r}{R}}$$

On réinjecte dans (1) : $E = \frac{r}{1 + \frac{r}{R}} \left(i_1 + \frac{E}{R} \right) + L \frac{di_1}{dt} + Ri_1$

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{R + 2r}{\left(1 + \frac{r}{R}\right)L} i_1 = \frac{\frac{E}{L}}{1 + \frac{r}{R}}}$$

On obtient un nouveau temps caractéristique $\boxed{\tau_f = \frac{L \left(1 + \frac{r}{R}\right)}{R + 2r}}$

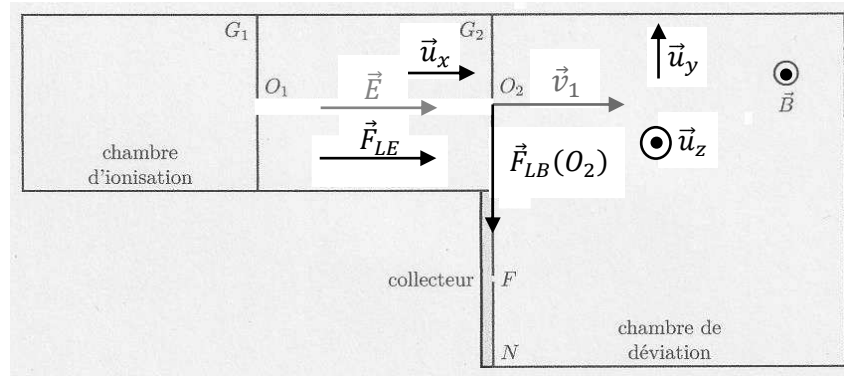
2.b. En régime permanent, on retrouve $\frac{R + 2r}{\left(1 + \frac{r}{R}\right)L} i_{1p} = \frac{\frac{E}{L}}{1 + \frac{r}{R}}$.

D'où $\boxed{i_{1p} = \frac{E}{2r + R}}$

Problème : Illustration de la force de Lorentz magnétique

1^{ère} partie :

I. Accélération des ions



I.1) Dans la chambre d'accélération, les cations sont soumis à l'action de la force de Lorentz électrique $\vec{F}_{LE} = q \cdot \vec{E}$. Pour que les cations soient accélérés, il faut que cette force soit orientée de O_1 vers O_2 . Sachant que $q = e > 0$ il faut que le champ électrique $\vec{E}$ soit également orienté de O_1 vers O_2 (cf schéma ci-dessus) :

$$\vec{E} = E \cdot \vec{u}_x \quad \text{avec } E > 0$$

Sachant que le champ électrique $\vec{E}$ « descend » les potentiels $V_{G1} > V_{G2}$ donc $U = V_{G1} - V_{G2} > 0$.

I.2) On assimile un cation à un point matériel observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans la chambre d'ionisation, en négligeant les effets du poids devant la force de Lorentz électrique, on peut dire que l'énergie mécanique de la particule chargée est constante et donnée par :

$$E_m(M) = \frac{1}{2} m \cdot v^2(M) + q \cdot V(M) = \text{cte}$$

En explicitant, on peut noter que :

$$\frac{1}{2} m \cdot v(O_2)^2 + e \cdot V_{G2} = \frac{1}{2} m \cdot v(O_1)^2 + e \cdot V_{G1}$$

En notant que la vitesse à l'entrée de la chambre d'accélération est négligeable, on établit que :

$$\frac{1}{2} m \cdot v(O_2)^2 = e \cdot (V_{G1} - V_{G2}) = e \cdot U$$

On établit l'expression de la vitesse à la sortie de la chambre d'accélération, en fonction des données :

$$v(O_2) = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}}$$

...puis celle des ions U_{92}^{235+} et U_{92}^{238+} de masses m_1 et m_2 :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m_1}} \quad \text{et} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m_2}}$$

I.3) A.N. : Posons $E_C(O_2) = e \cdot U$:

$$U = \frac{E_C(O_2)}{e} = 15,0 \text{ kV}$$

$$v_1 = 111 \text{ km.s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_2 = 110 \text{ km.s}^{-1}$$

II. Déviation des ions

II.1) En faisant l'hypothèse que dans la chambre de déviation, les cations soient soumis uniquement aux effets de la force de Lorentz magnétique, pour que les cations puissent atteindre le collecteur, il faut qu'en O_2 la force de Lorentz magnétique soit dirigée vers $-\vec{u}_y$ (cf schéma). Posons $\vec{B} = B \cdot \vec{u}_z$; en explicitant :

$$\vec{F}_{LB}(O_2) = q \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{B}) = e \cdot (v_1 \cdot \vec{u}_x \wedge B \cdot \vec{u}_z) = -e \cdot v_1 \cdot B \cdot \vec{u}_y$$

...avec e et v_1 positifs, il faut que $B > 0$: le champ magnétique est « sortant ».

II.2) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au cation entre t et $t + dt$:

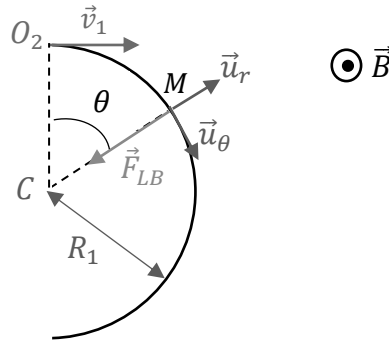
$$dE_C(M) = \delta w = q \cdot (\vec{v}(M) \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

avec $\vec{dl} = \vec{v}(M) \cdot dt$, en notant que par définition du produit vectoriel $\vec{v}(M) \wedge \vec{B}$ est orthogonal à $\vec{v}(M)$ on peut dire que la force de Lorentz magnétique ne travaille pas :

$$dE_C(M) = 0 \quad \text{donc} \quad E_C(M) = \text{cte} \quad \text{et} \quad \|\vec{v}(M)\| = v_1 = \text{cte}$$

le mouvement des particules chargées est uniforme.

II.3) Les ions U_{92}^{235+} décrivent une trajectoire circulaire et uniforme de rayon R_1 dans la chambre de déviation. Allure de la trajectoire :



Appliquons le principe fondamental de la dynamique à un ions U_{92}^{235+} :

$$m_1 \cdot \vec{a}(M) = q \cdot (\vec{v}(M) \wedge \vec{B})$$

Sachant que la trajectoire de l'ion est circulaire et uniforme, en coordonnées polaires on peut poser que :

$$\vec{a}(M) = -\frac{v_1^2}{R_1} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v}(M) = v_1 \cdot \vec{u}_\theta$$

En explicitant :

$$-m_1 \cdot \frac{v_1^2}{R_1} \vec{u}_r = e \cdot (v_1 \cdot \vec{u}_\theta \wedge \vec{B}) = -e \cdot v_1 \cdot B \cdot \vec{u}_r$$

En projetant sur $\vec{u}_r$ on établit l'expression du rayon de courbure R_1 :

$$R_1 = \frac{m_1 \cdot v_1}{e \cdot B}$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot m_1}{e \cdot B^2}} \quad \text{avec} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m_1}}$$

Par analogie :

$$R_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot m_2}{e \cdot B^2}}$$

II.4) On souhaite que $D = 2 \cdot R_1$. En explicitant :

$$D^2 = \frac{8 \cdot U \cdot m_1}{e \cdot B^2}$$

On établit l'expression du champ magnétique en fonction des données :

$$B = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot m_1}{e \cdot D^2}}$$

A.N. : $B = 5,76 \cdot 10^{-1} \text{ T}$

II.5) Posons $D' = 2 \cdot R_2$:

$$D' = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot m_2}{e \cdot B^2}}$$

Il y a séparation isotopique si :

$$D' > D + \frac{L'}{2}$$

A.N. : $D' = 945 \text{ mm}$. Avec $D = 940 \text{ mm}$ et $L' = 4,00 \text{ mm}$, $D + L'/2 = 942 \text{ mm}$: il y a bien séparation isotopique dans le collecteur.

II.6) Relation entre l'intensité du courant électrique et la charge :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

En régime continu, pendant une durée t la charge relative au transfert des ions U_{92}^{235+} est :

$$Q = \left(\frac{0,7}{100}\right) \cdot I \cdot t$$

Ce qui correspond au nombre d'ions U_{92}^{235+} :

$$N = \frac{Q}{e} = \left(\frac{0,7}{100}\right) \cdot \frac{I \cdot t}{e}$$

... au nombre de moles et à la masse d'ions U_{92}^{235+} :

$$n(U_{92}^{235+}) = \left(\frac{0,7}{100}\right) \cdot \frac{I \cdot t}{e \cdot \mathcal{N}_A} \quad \text{et} \quad m(U_{92}^{235+}) = \left(\frac{0,7}{100}\right) \cdot \frac{I \cdot t \cdot M(235)}{e \cdot \mathcal{N}_A}$$

En notant $M(235) = 235,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ la masse molaire de U_{92}^{235+} .

A.N. : En une année, posons $t = 365,25 \cdot (86400)$:

$$n(U_{92}^{235+}) = 0,229 \text{ moles} \quad \text{et} \quad m(U_{92}^{235+}) = 53,9 \text{ g}$$

III. Influence du rayonnement

III.1) Pour vérifier rapidement l'homogénéité de la puissance $\mathcal{P}$ proposée, il est intéressant de rappeler l'expression de la force d'interaction coulombienne qui s'exerce entre deux particules chargées au repos

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \vec{u}_r$$

On en déduit que :

$$\left[\frac{q^2}{\epsilon_0} \right] = [F \cdot r^2]$$

A partir du principe fondamental de la dynamique, on peut dire que :

$$[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

Soit :

$$\left[\frac{q^2}{\epsilon_0} \right] = M \cdot L^3 \cdot T^{-2}$$

Sachant que :

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 \cdot a^2}{6 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3}$$

Avec $[a] = L \cdot T^{-2}$ et $[c] = L \cdot T^{-1}$:

$$[\mathcal{P}] = \frac{(M \cdot L^3 \cdot T^{-2}) \cdot (L \cdot T^{-2})^2}{(L \cdot T^{-1})^3} = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$$

Sachant que la puissance est homogène au produit d'une force ($M \cdot L \cdot T^{-2}$) par la vitesse ($L \cdot T^{-1}$) on vérifie que l'expression proposée est bien homogène à une puissance.

III.2) En négligeant les effets du rayonnement, on peut supposer que l'accélération $a = \|\vec{a}\|$ s'identifie à celle établie précédemment :

$$a = \|\vec{a}\| = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{e \cdot B \cdot v_1}{m_1} \quad \text{avec} \quad R_1 = \frac{m_1 \cdot v_1}{e \cdot B}$$

En explicitant :

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 \cdot a^2}{6 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3} = \frac{e^4 \cdot B^2 \cdot v_1^2}{6 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3 \cdot m_1^2} = \frac{e^4 \cdot B^2}{6 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3 \cdot m_1^2} \left(\frac{2 \cdot E_C}{m_1} \right) \quad \text{avec} \quad E_C = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2$$

On établit l'expression cherchée :

$$\mathcal{P} = \frac{e^4 \cdot B^2 \cdot E_C}{3 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3 \cdot m_1^3}$$

III.3) Appliquons le théorème de la puissance cinétique à l'ion U_{92}^{235+} en notant que la puissance rayonnée est perdue par l'ion :

$$\frac{dE_C}{dt} = -\mathcal{P}$$

En explicitant :

$$\frac{dE_C}{dt} = -\frac{e^4 \cdot B^2 \cdot E_C}{3 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3 \cdot m_1^3}$$

Posons :

$$\tau = \frac{3 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3 \cdot m_1^3}{e^4 \cdot B^2} : \text{ temps caractéristique du système}$$

On établit l'équation différentielle vérifiée par $E_C(t)$:

$$\frac{dE_C}{dt} + \frac{E_C}{\tau} = 0$$

La solution de cette équation différentielle est du type :

$$E_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où A est une constante fixée par les conditions initiales : $A = E_C(0)$

$$E_C(t) = E_C(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

III.4) L'énergie perdue par rayonnement entre t et $t + dt$ est :

$$dE_C = -\mathcal{P} \cdot dt$$

En supposant $\mathcal{P}$ constante et en notant que le temps t mis par l'ion pour aller de O_2 et F correspond à une demi période T_1 de la trajectoire circulaire :

$$\delta E_C = -\frac{e^4 \cdot B^2 \cdot E_C}{3 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3 \cdot m_1^3} \left(\frac{T_1}{2} \right) = -\frac{e^4 \cdot B^2 \cdot E_C}{3 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3 \cdot m_1^3} \left(\frac{\pi}{\omega_1} \right) \text{ avec } T_1 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1}$$

En explicitant $E_C = E_C(0) = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2$:

$$\delta E_C = -\frac{e^4 \cdot B^2 \cdot v_1^2}{6 \cdot \epsilon_0 \cdot c^3 \cdot m_1^2 \cdot \omega_1}$$

En notant que :

$$\omega_1 = \frac{e \cdot B}{m_1} = \frac{v_1}{R_1} \text{ on peut poser que } \left(\frac{e \cdot B}{m_1} \right)^2 = \frac{v_1^2}{R_1^2}$$

On vérifie que :

$$\delta E_C = -\frac{e^2 \cdot v_1^3}{6 \cdot \epsilon_0 \cdot c^3 \cdot R_1} = -\frac{e^2 \cdot v_1^3}{3 \cdot \epsilon_0 \cdot D \cdot c^3}$$

III.5) A.N.: $\delta E_C = -5,06 \cdot 10^{-41} \text{ J} = -3,16 \cdot 10^{-22} \text{ eV}$

III.6) A.N. : avec $E_C = E_C(0) = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2$; $E_C = 2,40 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ on constate que l'écart relatif est :

$$\frac{\delta E_C}{E_C} = -2,10 \cdot 10^{-26}$$

On en conclut qu'il est possible de négliger les effets du rayonnement du cations dans la chambre de déviation.

2^{ème} partie : Etude de quelques accélérateurs de particules

IV. Description du principe de fonctionnement d'un cyclotron : Cf cours

V. Limites relativistes

V.1) Lorsque $v \ll c$ on a $\gamma = 1$ et $\gamma - 1 = v^2/2 \cdot c^2$. On retrouve bien les expressions de la mécanique classique $\vec{p}(M) = m \cdot \vec{v}(M)$ et $E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

V.2) Le travail de la force magnétique étant nul, l'énergie cinétique de la particule est constante. La vitesse v est donc constante, le mouvement de la particule est uniforme.

Comme γ est constante, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un proton en mouvement dans le champ magnétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}(M)}{dt} = \gamma \cdot m \cdot \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = q \cdot (\vec{v}(M) \wedge \vec{B})$$

L'équation différentielle du mouvement en mécanique relativiste, s'obtient donc en remplaçant, dans l'équation de la mécanique classique, la masse m de la particule par le produit $\gamma \cdot m$. En transposant ce résultat aux calculs effectués dans la question **II.3)** on en déduit que la trajectoire d'une particule chargée dont la vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique est un cercle de rayon :

$$R = \frac{\gamma \cdot m \cdot v}{q \cdot B}$$

V.3) On a maintenant :

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q \cdot B}{\gamma \cdot m} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \left(\frac{q \cdot B}{m} \right)$$

La vitesse angulaire est donc une fonction décroissante de la vitesse. La période de révolution de la particule augmente lorsque la vitesse augmente.

Lorsque la vitesse de la particule chargée atteint le domaine relativiste, le passage de la particule entre les dees n'est plus synchronisé avec l'instant où la tension $U(t)$ est maximale. Il arrive alors un moment où cette tension devient décélétratrice. Après avoir été accéléré, la particule perd ensuite de l'énergie à chaque traversée. Ce phénomène limite donc l'énergie que le cyclotron est susceptible d'apporter.

Pour que la machine permette d'atteindre des valeurs élevées de l'énergie, il faut que le mouvement de la particule reste synchronisé avec les variations de la tension $U(t)$.

Si le champ magnétique garde une valeur constante, ceci peut être réalisé en diminuant la fréquence du champ électrique au fur et à mesure que la vitesse de la particule augmente : c'est le principe du synchrocyclotron. Une autre possibilité consiste à conserver un champ électrique accélérateur de fréquence fixe et de réaliser un champ magnétique dont l'intensité croît avec le rayon de la trajectoire. On parle alors de cyclotron isochrone.

V.4)-a- On a :

$$\gamma = 1 + \frac{E_c}{m \cdot c^2}$$

A.N. : $\gamma = 7,5 \cdot 10^3$

La vitesse des protons est alors :

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

A.N. : $v = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: la vitesse des protons est pratiquement égale à la vitesse de la lumière...

V.4)-b- D'après la question **V.3)** le rayon du synchrotron vérifie :

$$R = \frac{\gamma \cdot m \cdot v}{q \cdot B}$$

On en tire la valeur du champ magnétique :

$$B = \frac{\gamma \cdot m \cdot c}{q \cdot R}$$

Pour le LHC, $R = 4,2 \cdot 10^3 \text{ m}$, on obtient donc $B = 5,5 \text{ T}$. Ce champ magnétique est environ 6 fois plus intense celui utilisé dans un cyclotron de Lawrence. Un champ magnétique d'une valeur aussi élevée est obtenu grâce à des bobines supraconductrices.

VI. Lentille magnétique

VI.1) Compte tenu du profil des lignes de champ magnétique, on peut dire que : $B_\theta(r, \theta, z) = 0$.

VI.2) Le champ magnétique est invariant par rotation autour de l'axe Oz donc $\vec{B}(M)$ est indépendant de θ . On en déduit que : $\vec{B}(M) = B_r(r, z) \cdot \vec{u}_r + B_z(r, z) \cdot \vec{u}_z$.

VI.3) Le champ magnétique est à flux conservatif. Ceci implique que le champ est plus intense dans les zones d'étranglement des lignes de champ, c.à.d. au voisinage du point O .

VI.4) En coordonnées cylindriques, l'accélération orthoradiale du point est :

$$a_\theta = 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta}$$

En notant que :

$$\frac{d}{dt}(r^2 \cdot \dot{\theta}) = 2 \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r^2 \cdot \ddot{\theta}$$

On vérifie que :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \cdot \dot{\theta}) = 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta} = a_\theta$$

VI.5) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron soumis uniquement à l'action de la force de Lorentz magnétique :

$$m \cdot \vec{a}(M) = q \cdot (\vec{v}(M) \wedge \vec{B})$$

En projetant dans la base de coordonnées cylindriques :

$$m \cdot \begin{pmatrix} \ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2 \\ 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} + r \cdot \ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -e \cdot \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \cdot \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_r \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

En explicitant, on vérifie que :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2 = -\frac{e \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot B_z}{m} \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \cdot \dot{\theta}) = \frac{e}{m} (\dot{r} \cdot B_z - \dot{z} \cdot B_r) \\ \ddot{z} = \frac{e \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot B_r}{m} \end{cases}$$

VI.6) On admet que :

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\left(\frac{e^2 \cdot r_0}{4 \cdot m^2 \cdot v_0^2}\right) \cdot B_z^2$$

En intégrant cette relation par rapport à z entre $-z_0$ et $+z_0$:

$$\int_{-z_0}^{+z_0} \left(\frac{d^2 r}{dz^2}\right) \cdot dz = -\left(\frac{e^2 \cdot r_0}{4 \cdot m^2 \cdot v_0^2}\right) \cdot \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2 \cdot dz = -\left(\frac{e^2 \cdot r_0}{4 \cdot m^2 \cdot v_0^2}\right) \cdot I$$

En reconnaissant que :

$$\int_{-z_0}^{+z_0} \left(\frac{d^2 r}{dz^2}\right) \cdot dz = \left[\frac{dr}{dz}\right]_{-z_0}^{+z_0} = \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z_0} - \left(\frac{dr}{dz}\right)_{-z_0}$$

On établit que :

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z_0} - \left(\frac{dr}{dz}\right)_{-z_0} = -\left(\frac{e^2 \cdot r_0}{4 \cdot m^2 \cdot v_0^2}\right) \cdot I$$

Posons :

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z_0} = -\frac{r_0}{OA'} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dr}{dz}\right)_{-z_0} = -\frac{r_0}{OA}$$

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z_0} - \left(\frac{dr}{dz}\right)_{-z_0} = -\left(\frac{e^2 \cdot r_0}{4 \cdot m^2 \cdot v_0^2}\right) \cdot I$$

$$-\frac{r_0}{OA'} + \frac{r_0}{OA} = -\left(\frac{e^2 \cdot r_0}{4 \cdot m^2 \cdot v_0^2}\right) \cdot I$$

On établit la relation de conjugaison de la lentille magnétique :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$$

Avec f' distance focale de la lentille magnétique définie par :

$$f' = \frac{4 \cdot m^2 \cdot v_0^2}{e^2 \cdot I}$$

VI.7) Il est possible de modifier la distance focale f' de la lentille magnétique en modifiant le champ magnétique B_z ... et donc l'intensité du courant du courant i qui circule dans les spires jointives.