

Problème I Étude d'un caténaire

Longtemps après son démarrage, on peut supposer que le TGV fonctionne en régime permanent. La puissance électrique nécessaire à son fonctionnement est fournie au TGV à partir de sous-stations électriques implantées tout le long de la voie et espacées d'une distance $\ell = 60,0$ km. Elles sont reliées par un fil conducteur, la caténaire, suspendu au-dessus des rails. La motrice TGV reçoit l'alimentation de la caténaire par un contact glissant appelé pantographe sur son toit. Tous les moteurs électriques de la locomotive sont montés en parallèle entre le pantographe et les rails qui servent de liaison masse à la Terre. Les sous-stations électriques seront assimilées à des générateurs idéaux de f.é.m. E constante et identique pour toutes les sous-stations. On admettra que les moteurs de la locomotive se comportent, d'un point de vue électrique, de la même manière qu'un générateur idéal de courant, imposant un courant I_0 constant orienté de la caténaire vers le sol comme sur la figure 1.

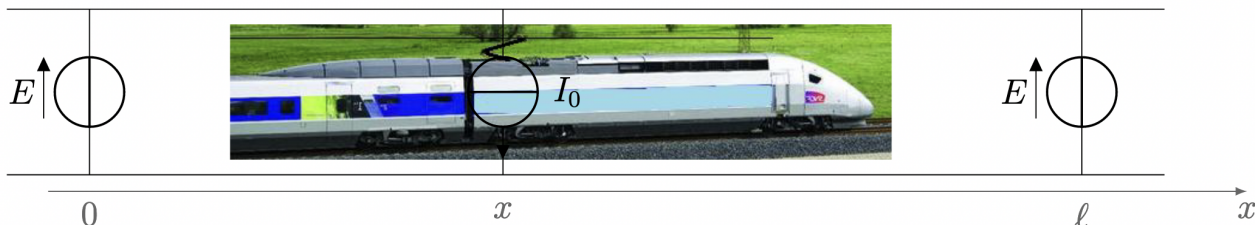


Figure 1 : Schéma de principe de l'alimentation d'un TGV.

A Modélisation de la caténaire et du rail

Pour l'étude qui va suivre, on s'intéresse au trajet du train entre deux sous-stations. On suppose que la section transversale de la caténaire (surface d'une coupe transversale) est de $s = 1,47$ cm². La caténaire est en cuivre, métal dont la conductivité est de $\sigma = 5,82 \times 10^7$ USI (Unité du Système International). Le rail de chemin de fer présente une section transversale estimée à $s_{\text{rail}} = 50$ cm². Ce rail rectiligne est confondu avec l'axe (Ox) dont l'origine O ($x = 0$) est placée au niveau de la sous-station à gauche sur le schéma. La variable $x \in [0, \ell]$ repère à tout instant la position de la locomotive entre les deux sous-stations d'alimentation (voir figure 1).

Sachant qu'une longueur ℓ de métal de section s et de conductivité σ est équivalente à un conducteur ohmique de résistance $R_{\text{metal}} = \frac{\ell}{\sigma s}$, nous allons chercher tout d'abord à modéliser simplement la situation.

1. 1.a. Déterminer les dimensions d'une puissance électrique $\mathcal{P}$ et d'une résistance R .
- 1.b. Déterminer la dimension puis l'unité de la conductivité σ .
2. En considérant que le rail est fait du même métal que la caténaire (donc caractérisé par la même valeur de conductivité), justifier que l'on puisse négliger la résistance du rail devant celle de la caténaire (que l'on notera R).
3. Déterminer la résistance totale R de la caténaire entre les deux sous-stations considérées et effectuer l'application numérique.
4. Déterminer, en fonction de σ , s et x , l'expression de la résistance R_1 de la portion de caténaire amenant le courant à la locomotive depuis la sous-station de gauche. Ré-exprimer le résultat en fonction de ℓ , x et R (résistance totale de la caténaire entre les deux sous-stations).
5. Déterminer, en fonction de R , ℓ et x , l'expression de la résistance R_2 de la portion de caténaire amenant le courant à la locomotive depuis la sous-station de droite.

B Bilan de puissance

Le système électro-mécanique étudié est équivalent au circuit électrique ci-dessous.

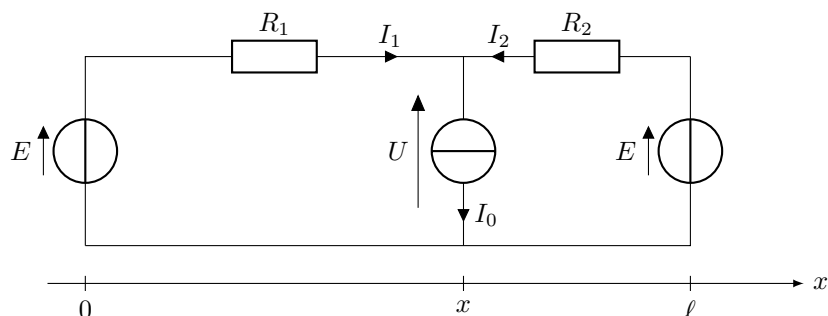


Figure 2 : Schéma électrique équivalent.

1. Établir les expressions de I_1 , I_2 et U en fonction de I_0 , R_1 et R_2 , puis en fonction de R , E , I_0 , x et ℓ .
On vérifiera notamment que $I_1 = I_0 \frac{\ell - x}{\ell}$.
2. En déduire la puissance $\mathcal{P}_c$ consommée par la locomotive (c'est-à-dire reçue par la locomotive) en fonction de E , R , I_0 , x et ℓ .
3. Déterminer la puissance $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule par la caténaire (c'est-à-dire la somme des puissances reçues par R_1 et R_2) en fonction de R_1 , I_1 , R_2 , I_2 , puis en fonction de R , I_0 , x et ℓ . Que devient l'énergie associée ?
4. Déterminer la puissance totale $\mathcal{P}_f$ fournie par les deux sous-stations, en fonction de E , I_1 et I_2 , puis en fonction de E et I_0 .
5. Vérifier que l'on a : $\mathcal{P}_f = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_c$. Que signifie physiquement cette égalité ?

C Rendement énergétique

Le mardi 3 avril 2007, à 13h14, la SNCF, associée à la compagnie ALSTOM, portait le record du monde de vitesse sur rail à la valeur $574,8 \text{ km h}^{-1}$ au point kilométrique 194 de la ligne à grande vitesse est-européenne. Lors du record de vitesse, la puissance des moteurs était augmentée par rapport aux moteurs habituels et la tension d'alimentation en sortie des sous-stations avait été montée exceptionnellement à $E = 31,2 \text{ kV}$ sur la zone du record à la place des 25 kV habituels. Au moment du record, l'intensité électrique reçue au pantographe a été mesurée : elle était de $I_0 = 800 \text{ A}$.

Pour la suite, l'instant t_0 correspond à l'instant auquel la locomotive passe par la sous-station de gauche. Cet instant est choisi comme instant initial : $t_0 = 0$. De plus, on suppose que le train roule à la vitesse constante $v_0 = 574,8 \text{ km h}^{-1}$.

1. À quel instant t_f , la locomotive atteint-elle alors la fin du tronçon considéré (sous-station de droite) ?
2. D'après les résultats de la partie B, montrer que la puissance dissipée par effet Joule dans la caténaire s'écrit $\mathcal{P}_J(t) = RI_0^2 \frac{v_0 t (\ell - v_0 t)}{\ell^2}$.
3. En déduire l'expression de l'énergie $W_{J,t_0 \rightarrow t_f}$ dissipée par effet Joule pendant le passage du train sur ce tronçon en fonction de R , I_0 , v_0 et ℓ .
4. Déterminer l'expression de l'énergie totale $W_{f,t_0 \rightarrow t_f}$ fournie par les deux sous-stations sur le même intervalle de temps. On donnera le résultat en fonction de E , I_0 , ℓ et v_0 .
5. En déduire l'expression de l'énergie $W_{c,t_0 \rightarrow t_f}$ consommée par les moteurs de la locomotive, toujours le long du tronçon considéré. On donnera le résultat en fonction de E , R , I_0 , ℓ et v_0 .
6. Exprimer le rendement de ce mode d'alimentation de la locomotive, que l'on définit par : $\eta = \frac{W_{c,t_0 \rightarrow t_f}}{W_{f,t_0 \rightarrow t_f}}$ en fonction de R , I_0 et E .
7. Faire l'application numérique que vous exprimerez en %.

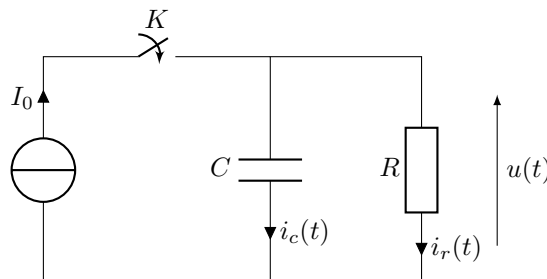
Problème II Modèle de Winkessel du système cardiovasculaire

Ce problème propose d'étudier et modéliser le système artériel du corps humain et son débit sanguin.

A Modèle électrique du système artériel

Le cœur joue le rôle de pompe injectant du sang dans un réseau d'artères. Le cœur communique avec le réseau artériel via la valve aortique qui s'ouvre ou se ferme. Les parois de l'aorte et des grosses artères élastiques se comportent comme une « capacité » apte à stocker transitoirement une certaine quantité sanguine. Le réseau artériel est également caractérisé par sa résistance à l'écoulement dont l'on rend compte par une résistance hydraulique R . Ce modèle de la circulation sanguine est basée sur une analogie avec un circuit électrique.

1. Le circuit électrique équivalent au système cardiovasculaire est donné ci-dessous :



- 1.a. À quel organe correspond le générateur idéal de courant ?

1.b. À quoi correspond l'interrupteur ?

1.c. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ quand K est ouvert et la mettre sous forme canonique. L'expression de τ sera précisée en fonction des données.

1.d. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ quand K est fermé en fonction de τ , R et I_0 .

On note $P(t)$ la pression de l'aorte et P_∞ la pression au bout du système artériel. D_0 est le débit volumique sanguin, supposé stationnaire, en provenance du ventricule gauche du cœur.

2. 2.a. Recopier et compléter les cellules vides du tableau avec les termes suivants :

— Différence de potentiels ou tension : $u(t)$

— Débit de sang : $D_C = \frac{dV}{dt}$

— Intensité constante : I_0

— Résistance électrique : R

Modèle électrique	Modèle cardiovasculaire
Charge : q	Volume de sang : V
Intensité (ou débit de charges) : $i_C = \frac{dq}{dt}$	
	Débit sanguin constant : D_0
Potentiel électrique	Pression
	Différence de pressions : $P(t) - P_\infty$
	Résistance hydraulique : R

2.b. Afin de compléter cette analogie, préciser comment est l'interrupteur K lorsque la valve aortique est fermée, et lorsque la valve aortique est ouverte.

3. 3.a. En utilisant le tableau de correspondance, écrire l'équation différentielle vérifiée par $P(t)$ quand la valve aortique est fermée en fonction de τ et P_∞ . On ne cherchera pas à déterminer l'expression de la constante de temps biologique.

3.b. Établir l'équation différentielle vérifiée par $P(t)$ quand la valve aortique est ouverte en fonction de τ , P_∞ , R et D_0 .

B Battements du cœur

Grossièrement, le cycle cardiaque se divise en deux grandes phases : la systole et la diastole.

- Durant la systole, la valve aortique est ouverte : en se contractant, le ventricule gauche du cœur expulse du sang dans l'aorte plus vite qu'il ne peut s'écouler en raison des résistances périphériques. Il en résulte une augmentation de pression jusqu'à un maximum appelé pression systolique P_s . On note t_s la durée de la systole.
- Durant la diastole, le ventricule du cœur se relâche. La valve aortique se referme et l'aorte se vide du sang qu'elle a emmagasiné vers le reste du réseau. La pression diminue et atteint un minimum appelé pression diastolique P_0 juste avant une nouvelle contraction. On note t_d la durée de la diastole.

1. Étude de la systole. On pose $t = 0$ au début de la systole et $P(t = 0) = P_0$.

1.a. Quel est l'état de la valve aortique durant la systole ?

1.b. Résoudre l'équation différentielle correspondante pour déterminer l'expression de $P(t)$ durant la systole en fonction de P_0 , P_∞ , D_0 , R et τ .

2. Étude de la diastole. À $t = t_s$, c'est le début de la diastole. On note $P_s = P(t_s)$.

2.a. Quel est l'état de la valve aortique pendant la diastole ?

2.b. Résoudre l'équation différentielle correspondante pour déterminer l'expression de $P(t)$ durant la diastole en fonction de P_s , P_∞ , t_s et τ .

3. Représenter la pression artérielle $P(t)$ en fonction du temps durant deux battements cardiaques. Vous y ferez apparaître les pressions P_0 et P_s ainsi que les durées t_s , t_d et T respectivement de la systole, de la diastole et d'un battement cardiaque.

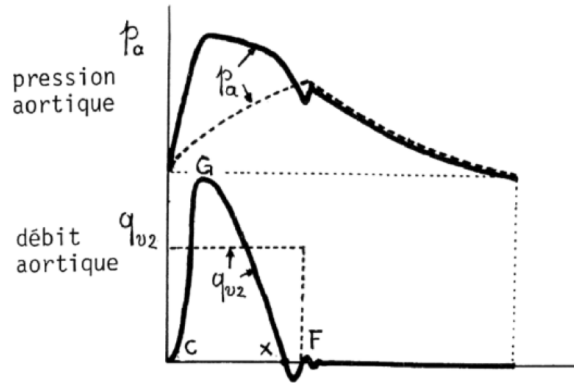
4. 4.a. Exprimer la pression systolique P_s et la pression diastolique P_0 en fonction de P_∞ , D_0 , R , τ , T et t_s .

4.b. Calculer P_s et P_0 en mm Hg pour $C = 6,03 \times 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ Pa}^{-1}$, $R = 1,265 \times 10^8 \text{ Pa s m}^{-3}$, une fréquence cardiaque de 70 batt/min, $t_s = 0,33 \text{ s}$, $D_0 = 260 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ et $P_\infty = 7,0 \text{ mmHg}$. On rappelle que $1 \text{ mmHg} = 136 \text{ Pa}$.

4.c. En moyenne les pressions systolique et diastolique normales en cm Hg sont telles que : $\frac{P_s}{P_0} = \frac{12}{8}$.

Commenter.

5. L'expérience donne des résultats ayant l'allure des courbes suivantes. En pointillé le modèle de Winkessel, en gras la courbe expérimentale. Commenter.



Variation de la pression artérielle et du débit sanguin aortiques au cours d'un battement cardiaque.

Problème III Propulsion électromagnétique : un prototype de laboratoire

Un canon classique peut propulser des projectiles lourds (jusqu'à quelques centaines de kilogrammes) à de longues portées (quelques dizaines de kilomètres). Cependant, même si Jules Verne l'avait envisagé dans son roman de la Terre à la Lune, pour des projectiles encore plus lourds et des portées encore plus longues, la propulsion par une charge explosive est inadaptée car elle nécessiterait des charges beaucoup trop importantes. On envisage alors d'utiliser la propulsion électromagnétique à l'aide d'un canon électromagnétique appelé « coilgun ». Des essais ont permis d'effectuer le tir d'un projectile de masse $m_e = 15 \text{ kg}$ à 45° par rapport à l'horizontale, permettant d'atteindre une portée $D = 15 \text{ km}$.

Afin d'étudier le fonctionnement du coilgun et les paramètres influents, un prototype à petite échelle (figure 1) a été monté à l'IUT de mesures physiques de Clermont-Ferrand. Un projectile en acier est placé à l'entrée d'une bobine. Il est accéléré par cette bobine qui est alimentée par un ensemble de condensateurs chimiques. Les condensateurs sont préalablement chargés par un générateur continu délivrant une tension $E = 200 \text{ V}$. Un thyristor T permet la décharge des condensateurs dans la bobine de sorte que le montage électrique au moment du tir est équivalent au circuit RLC série en régime libre (figure 2) dont on ferme l'interrupteur K à $t = 0$.

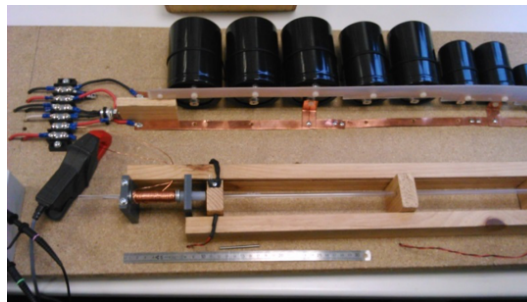


Figure 1 - Dispositif expérimental.

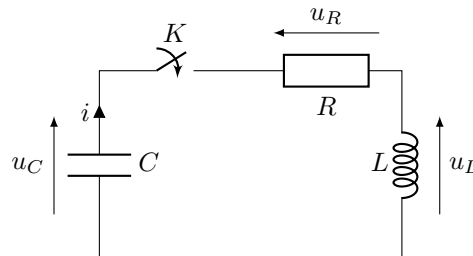


Figure 2 - Schéma du montage équivalent.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur au sein du circuit RLC série et la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{\tau_{RL}} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau_{RL} \tau_{RC}} u_C = 0 \quad (1)$$

On précisera les expressions des constantes de temps τ_{RC} et τ_{RL} en fonction de R , L et C .

La figure 3 propose des enregistrements, au cours d'un premier tir d'essai, de la tension u_C aux bornes du condensateur et du courant d'intensité i dans le montage.

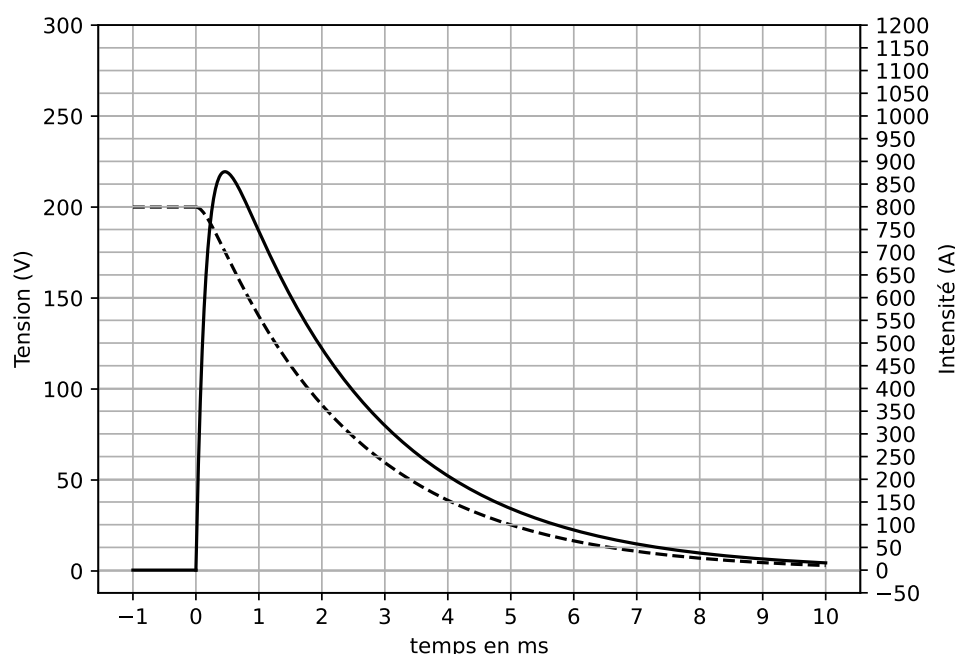


Figure 3.

2. 2.a. Identifier chacune des deux courbes. On justifiera brièvement la réponse.
- 2.b. Dans quel type de régime se trouve le montage RLC série ?
3. Déterminer pour le régime libre observé l'expression des racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique associée à l'équation (1) telles que $r_1 < r_2$. On exprimera ces deux racines en fonction de τ_{RC} et τ_{RL} .
4. En déduire l'expression de $u_C(t)$ en fonction de la tension E , des racines r_1 et r_2 et du temps t .
5. En déduire l'expression du courant $i(t)$ en fonction de E , C , des racines r_1 et r_2 et du temps t .
6. L'essai est effectué dans le cas où $\tau_{RL} \ll \tau_{RC}$.

- 6.a. En utilisant l'approximation $\sqrt{1 - 4\varepsilon} \simeq 1 - 2\varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$, montrer que :

$$r_1 \simeq -\frac{1}{\tau_{RL}} \text{ et } r_2 \simeq -\frac{1}{\tau_{RC}}$$

- 6.b. En déduire que l'intensité apparaît comme la superposition de deux exponentielles amorties de temps caractéristiques τ_{RL} et τ_{RC} :

$$i(t) \simeq I_0 e^{-t/\tau_{RC}} - I_0 e^{-t/\tau_{RL}}$$

On précisera l'expression de I_0 en fonction de C , E , τ_{RL} et τ_{RC} .

- 6.c. Au bout d'une milliseconde, tout se passe comme si la variation de courant était uniquement due à l'exponentielle de temps caractéristique élevé.
- 6.c.a. En déduire une estimation graphique de la constante de temps τ_{RC} et de l'intensité I_0 à l'aide de la figure 3 reproduite en annexe. L'annexe sera à rendre en y faisant apparaître les traits de construction permettant les estimations.
- 6.c.b. La capacité totale de l'association de condensateurs est $C = 12,5 \text{ mF}$. En déduire les valeurs de R et de L ayant permis de réaliser cet essai.