Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1 ($\star$ Cal)**.** Soient $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Donner la forme algébrique de z_3.
2. Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2.
3. En déduire le module et un argument de z_3 puis la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 ($\star$ Cal)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \left]-1\,;1\right[$, $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la forme algébrique de :

1. $z_1 = (1-2\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$
2. $z_2 = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}}{1-\mathrm{i}}$
3. $z_3 = (\sqrt{3}-\mathrm{i})^{2024}$
4. $z_4 = \dfrac{1+\mathrm{i}\tan\theta}{1-\mathrm{i}\tan\theta}$, $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
5. $z_5 = (1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n$
6. $z_6 = \dfrac{1}{1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$

Exercice 3 ($\star$ Cal, Rai ©)**.** Pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$, on pose $f(z) = \dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$.

1. Déterminer les z tels que
   1. $f(z) \in \mathbb{R}$
   2. $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$
   3. $|f(z)| = 1$
2. Interpréter géométriquement les ensembles ci-dessus.

Exercice 4 ($\star$ Cal)**.** Soient trois nombres complexes : $z_1 = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - \mathrm{i}\sqrt{8}$. On pose $Z = \dfrac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2. En déduire une forme trigonométrique de Z.
3. Calculer la forme algébrique de Z.

Exercice 5 ($\star$ Rai)**.** Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le complexe $\left(\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^7}{(1-\mathrm{i})^5}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 6 ($\star\star$ Cal, Rai ©)**.** Trouver les modules et arguments de (préciser les conditions pour $\theta \in \mathbb{R}$)

1. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}$
2. $z = (1+\mathrm{i})^n$
3. $z = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
4. $z = 1 + \mathrm{i}\tan\theta$
5. $z = \dfrac{1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$
6. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$

Exercice 7 ($\star\star$ Rai ©)**.** Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\arctan(\alpha)$ est un argument de $1 + \mathrm{i}\alpha$.

Exercice 8 ($\star$ Cal ©)**.** Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $|a|^2 + |b|^2 = \dfrac{1}{2}(|a-b|^2 + |a+b|^2)$.

Exercice 9 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.**

1. Soit $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, montrer que $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |z_k|$.
2. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $\exists i \in [\![1\,;n]\!] \quad \exists\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \quad \forall j \in [\![1\,;n]\!] \qquad z_j = \lambda_j z_i$
3. Interpréter graphiquement cette condition.

Exercice 10 ($\star$ Rai ©)**.** On dit que $n \in \mathbb{N}$ est somme de deux carrés si :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2 \qquad n = a^2 + b^2$$

Soit n_1 et n_2 deux entiers qui sont sommes de deux carrés : $n_1 = a^2 + b^2$ et $n_2 = c^2 + d^2$. Posons $z_1 = a + \mathrm{i}b$, $z_2 = c + \mathrm{i}d$. Comment écrire n_1 et n_2 en fonction de z_1 et z_2 ? Démontrer $n_1 n_2$ est somme de deux carrés.

Exercice 11 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z+z') = f(z) + f(z')$ et $f(zz') = f(z)f(z')$.

Exercice 12 ($\star$ Cal ©)**.** Démontrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1| \leqslant |t|$.

Exercice 13 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** On pose $G = \left\{a + \mathrm{i}b \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Montrer que si $(g,h) \in G^2$ alors $g + h \in G$ et $gh \in G$.
2. Déterminer les $g \in G$ non nul tel que $g^{-1} \in G$. (on dit que g est inversible dans G).
3. Démontrer que tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $g \in G$ tel que $|z - g| < 1$.
4. Soit $(\alpha, \beta) \in G^2$ avec $\beta \neq 0$, démontrer qu'il existe $(q,r) \in G^2$ tel que $\alpha = \beta q + r$ avec $|r| < |\beta|$ (division euclidienne dans G).

Trigonométrie

Exercice 14 ($\star$ Cal)**.** Linéariser $\cos^3(\theta)$, $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$ et $\sin^4(\theta)$, $\cos^4(\theta)$.

Exercice 15 ($\star$ Cal)**.** Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

Exercice 16 ($\star$ Cal)**.**
1. Écrire $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$ sous la forme $A\cos(x-\varphi)$.
2. Résoudre $\sin(x) + \cos(x) = 0$
3. Résoudre l'inéquation $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) < 1$

Équations algébriques

Exercice 17 (𝄞$\star$ Cal ©)**.**
1. Donner l'expression des trois racines cubiques de 1.
2. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer $\overline{j}$, $1 \times j \times j^2$, $1 + j + j^2$ et $j(j+1)$.

Exercice 18 ($\star$ Cal)**.** Déterminer les racines carrées de $1 + 6i$, $24i - 7$ et de $-5 + 12i$.

Exercice 19 ($\star$ Cal)**.** Déterminer les racines cubiques de $-\sqrt{3} + i$.

Exercice 20 ($\star$ Cal)**.** Déterminer les racines n-ièmes de -1.

Exercice 21 ($\star\star$ Cal ©)**.**
1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1 + i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 22 ($\star$ Cal)**.** Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$
3. $z^2 - (3+2i)z + 3i = 0$
4. $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$
5. $(1-i)z^2 - (5-i)z + 10 = 0$
6. $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$
7. 𝄞$\star\star$ $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$ ©
8. $e^z = j$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
9. $z^n = \overline{z}$.

Exercice 23 ($\star$ Cal)**.** Résoudre $\left(\dfrac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\dfrac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\dfrac{z-2i}{z+2i}\right) = -1$.

Exercice 24 ($\star\star$ Cal, Rec ©)**.** Dans cet exercice, on note $w = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
1. Calculer w^5, $a = w + w^4$ et $b = w^2 + w^3$ sous forme algébrique.
2. Calculer explicitement $a + b$ et ab. De quelle équation les complexes a et b sont-ils solutions ?
3. Résoudre cette équation.
4. En déduire $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ puis $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 25 ($\star\star$ Rec, Rai, Cal)**.** Résoudre l'équation $z^3 - (4i+2)z^2 + (6i-4)z + 4 = 0$, Commencer à chercher une racine imaginaire pure.

Exercice 26 ($\star$ Cal, Rai ©)**.** Résoudre, dans $\mathbb{C}$, $\begin{cases} z + z' &= 5 + 2i \\ zz' &= 5 + 5i \end{cases}$.

Exercice 27 ($\star\star\star$ Rai, Rec)**.** Posons $\omega = \dfrac{4+3i}{5}$. Montrer que $\omega \in \mathbb{U}$, que $\omega^n = \dfrac{a_n + ib_n}{5^n}$, avec a_n et b_n deux entiers définis par récurrence. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ω n'est pas une racine n-ième de l'unité.

Transformations du plan complexe

Exercice 28 ($\star$ Cal, Rai)**.** Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :
1. 1, z et z^2 forment un triangle rectangle.
2. z, $\dfrac{1}{z}$ et i sont alignés.
3. z, z^2 et z^4 sont alignés.

Exercice 29 ($\star$ Cal, Rai ©)**.** Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :
1. $|z+i| = |z-i|$
2. $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |1+z|$
3. $z + \bar{z} = z\bar{z}$

Exercice 30 ($\star$ Rai)**.** Soit (a, b, c) trois complexes.
1. Donner une CNS sur a, b et c tel que le triangle abc soit équilatéral utilisant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
2. Existe-t-il des triangles équilatéraux à coordonnées entières ?

Exercice 31 ($\star$ Rai)**.** Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :
1. La translation de vecteur d'affixe $3 - 2i$.
2. L'homothétie de centre le point d'affixe $2 - 2i$ et de rapport 2.
3. La rotation r d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et de centre le point d'affixe i.
4. La symétrie de centre $1 + i$.