Intégrales et primitives

Exercice 1 ($\star$ Cal)**.** Déterminer une primitive des fonctions (*préciser le ou les intervalles d'intégration*) :

a) $t \mapsto \dfrac{t}{t-1}$ b) $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ c) $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$

d) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ e) $t \mapsto \cos^3(t)$ f) $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{4t}}{5+\mathrm{e}^{4t}}$

g) $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ h) $t \mapsto \dfrac{1}{2it+3}$ i) $t \mapsto \dfrac{3t^2}{(t^3+27)^3}$

j) $t \mapsto \mathrm{e}^{2t+1}\sin(3t+4)$ k) $x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}}$ l) $x \mapsto t(1-t^2)^4$

m) $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ n) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$ o) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3x+3}$

p) $x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2+2x+3}$ q) $x \mapsto \ln(x)^2$ r) $x \mapsto \sin(\ln(x))$

s) $x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ t) $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^6(x)}$ u) $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

v) $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$ w) $x \mapsto \sin(x)\cos(x)^{2024}$

x) $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ y) $x \mapsto \ln(x)$ z) $x \mapsto \arccos(x)$

Exercice 2 ($\star$ Cal)**.** Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\,\mathrm{d}t$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\,\mathrm{d}t$ e) $\displaystyle\int_0^2 \max(t,t^2)\,\mathrm{d}t$ f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int_1^3 |x-2|\times x\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ k) $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ l) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$ n) $\displaystyle\int_1^2 x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ o) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

p) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln(t)+1}}$ q) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{2t\ln(t)+t}$ r) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

s) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2u}{\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$ t) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\sqrt{1+t}}}$ u) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

v) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^{3/2}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ w) $\displaystyle\int_2^3 5x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ x) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln(t))^2}$

Exercice 3 ($\star\star$ Rec, Rai, Cal YT)**.** 1. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t$$

2. Calculer la valeur de cette intégrale.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Exercice 4 ($\star\star\star$ Rec, Cal, Rai ©)**.** Posons $I_{p,q} = \displaystyle\int_a^b (t-a)^p(b-t)^q\,\mathrm{d}t$, pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

1. Si $q \geqslant 1$, trouver une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
2. Exprimer $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

Exercice 5 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit f continue sur $\mathbb{R}$, après avoir justifié la dérivabilité, dériver $x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit f continue sur $[-1\,;1]$, étudier la limite de $x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en 0.

Exercice 7 ($\star$ Cal ©)**.** Déterminer les limites des suites définies par :

$$u_n = \int_1^2 \ln^n(x)\mathrm{d}x \qquad v_n = \int_0^1 x^n\sin(\cos(\sqrt{x}))\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \star\star \quad w_n = n\int_0^{1/n} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$$

Exercice 8 (𝄞$\star\star$ Cal, Rai, Rec ©)**.** Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ est strictement croissante.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{e} = u_n + \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} \leqslant \mathrm{e} \leqslant u_n + \dfrac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$
4. En déduire que $(u_n)_n$ est convergente et détermine sa limite.

5. On suppose que $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$, ainsi $\mathrm{e} = p/q$ avec $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. En considérant $u_n < \mathrm{e} \leqslant u_n + \dfrac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$ trouver une contradiction est conclure.

Exercice 9 (⋆⋆ Cal (Bac2012))**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $I_{n+2} = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - \dfrac{n+1}{2} I_n$
2. Calculer I_1, I_3 et I_5.
3. Montrer que $(I_n)_n$ est une suite décroissante et positive.
4. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

Équations différentielles du premier ordre

Exercice 10 (⋆ Cal)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+t^2)y' + 2ty = 0$
2. $y' + y = 4\operatorname{ch}(x)$
3. $(1+x^2)y'(x) + xy(x) = \sqrt{1+x^2}$
4. $\mathrm{i}y' + y = \sin(x)$
5. $y' + \tan(x)y = \cos^2(x)$ sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 11 (⋆⋆ Rai, Rec, Cal)**.**

1. Résoudre $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ sur $I = \left]-\infty\,;-1\right[$, sur $I = \left]-1\,;1\right[$ et sur $I = \left]1\,;+\infty\right[$
2. Existe-t-il une solution sur $\mathbb{R}$ à cette équation ?

Exercice 12 (⋆⋆ Rai, Rec, Cal ©)**.** Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$.

Exercice 13 (⋆ Cal ©)**.** Résoudre sur $\left]-1\,;+\infty\right[$: $(x+1)y' + xy = x^2 + 2x + 1$ avec $y(1) = 1$. *Chercher une solution particulière polynomiale.*

Exercice 14 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $(x,x') \in \mathbb{R}^2$, $f(x+x') = f(x)f(x')$.

Exercice 15 (⋆ Cal)**.** Résoudre le problème de Cauchy suivant sur $\mathbb{R}_+$ (poser $\tau = L/R$) : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$ avec $i(0) = 0$

Exercice 16 (⋆ Cal)**.** Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\frac{\mathrm{d}\,[A]\,(t)}{\mathrm{d}t} + k\,[A]\,(t) = 0 \qquad \text{avec } [A]\,(0) = [A]_0$$

Où $[A]\,(t)$ est la quantité de matière du réactif A au temps t et $[A]_0$ la quantité initiale. Combien de temps avant que la quantité du réactif A ait été divisé par 2 par rapport à la quantité initiale ?

Exercice 17 (⋆⋆ Rai, Rec, Cal)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$ l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$. La résoudre également sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 (⋆⋆ Rai, Rec, Cal YT)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$ l'équation différentielle $xy' - 2y = x^3$. La résoudre également sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles du second ordre

Exercice 19 (⋆ Cal)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = \sin(x)$
2. $y'' - y' - 6y = \mathrm{e}^{3x} + \sin(x)$
3. $y'' - 3y' + 4y = 6x + 1 + 7\mathrm{e}^{-x}$
4. $y'' - 2y' + y = (x^2+1)\mathrm{e}^x$ ©

Pour la 4., chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^x$.

Exercice 20 (⋆ Cal)**.** Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y'' - 2(1+\mathrm{i})y' + 2\mathrm{i}y = x + \mathrm{i} \qquad \text{avec } y(0) = y'(0) = 0$$

Exercice 21 (⋆ Cal)**.** Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \dfrac{E}{LC}$ avec $u(0) = 0$ et $\dot{u}(0) = \dfrac{E}{RC}$ ($\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$)

Exercice 22 (⋆⋆ Cal ©)**.** Soit (E) $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3\mathrm{e}^x$.

1. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution de l'équation homogène associée.
2. Soit $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z\colon x \mapsto y(x)\mathrm{e}^{-x}$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est une solution d'une équation.
3. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 23 (⋆⋆ Cal ©)**.** On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Dans les questions 1 à 4, on prend une fonction f qui vérifie cette équation.

1. Prouver que f deux fois dérivable $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est solution d'une EQDL du second ordre.
3. On pose $g\colon t \mapsto f(\mathrm{e}^t)$. Montrer que g est solution de $y'' - y' + y = 0$.
4. Résoudre $y'' - y' + y = 0$.
5. Déterminer l'ensemble des solutions.

Exercice 24 (⋆⋆ Rec, Cal)**.** Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(1-x) = \mathrm{e}^x$.

Exercice 25 ($\star$ Cal)**.** Résoudre le système $\begin{cases} x'(t) & = & x(t)+y(t) \\ y'(t) & = & x(t)-y(t) \end{cases}$ avec $x(0)=0$, $y(0)=1$