



**Prérequis :** le chapitre logique, surtout bien connaître les méthodes pour montrer l'existence, l'unicité, les implications ainsi que savoir nier les propositions.

**Objectifs :**

- L'étude précise du vocabulaire lié aux ensembles, notamment comment prouver que deux ensembles sont égaux, ainsi que les opérations sur les ensembles notamment l'intersection, l'union et le complémentaire d'ensembles.
- Prolonger (sic) la notion d'application à des ensembles quelconques, donc plus vastes, et introduire la notion d'injection, de surjection pour faire le lien avec la notion de bijection déjà rencontrée dans le cas des fonctions numériques.

Dans ce chapitre, les notions vues sont très générales et applicables à n'importe quels types d'ensembles (nombres, vecteurs, fonctions, suites, matrices, ...) ou d'applications et sera donc utilisé dans de nombreux chapitres ultérieurs.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Ensembles</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.2	Opérations sur les ensembles . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Applications</b>	<b>4</b>
2.1	Définition . . . . .	4
2.2	Image directe et image réciproque d'une fonction . . . . .	6
2.3	Composition de fonctions . . . . .	7
2.4	Applications injectives . . . . .	7
2.5	Applications surjectives . . . . .	8
2.6	Applications bijectives . . . . .	8

# 1 Ensembles

## 1.1 Définitions



### Définition d'un ensemble

On appelle **ensemble** toute collection d'objets appelés **éléments** de cet ensemble. Pour dire qu'un élément  $x$  **appartient** à un ensemble  $E$ , on écrit  $x \in E$ . Sinon, on écrit  $x \notin E$ . On appelle **ensemble vide** l'ensemble constitué d'aucun élément, on le note  $\emptyset$ . On appelle **singleton** tout ensemble constitué d'un seul élément  $a$ , noté  $\{a\}$ .

**Exemple 1.**  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont des ensembles usuels de nombres. Ainsi,  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  mais  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$  et même  $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ .

**Remarque 1.** Pour définir un ensemble, on peut procéder par :

- Extension : lister tous les éléments qu'il contient :  $F = \{2, 4, 6\}$
- Compréhension : donner une propriété qui caractérise les éléments parmi ceux d'un ensemble :  
 $F = \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \text{ pair et } 1 \leq k \leq 7\}$ . D'une façon générale,  $\mathcal{P}(x)$  est une proposition qui dépend de  $x \in E$ , alors  $F = \{x \in E \text{ tel que } \mathcal{P}(x)\}$  est un ensemble.
- Paramétrage : on donne l'expression des éléments de l'ensemble en fonction d'une variable :  $F = \{2k \mid k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket\}$ .

**Exemple 2.** Donner la définition de  $\mathbb{U}_n$  par compréhension, par extension (pour  $n = 3$ ), puis par paramétrage.



### Attention à ne pas confondre les éléments dans la définition par compréhension

Si  $F = \{k \in \llbracket 0; 7 \rrbracket \mid \exists p \in \mathbb{N}, k = 2p\}$ , alors si  $k \in \llbracket 0; 7 \rrbracket$  avec  $k = 2p$  avec  $p \in \mathbb{N}$ , alors  $k \in F$ , mais  $p$  pas forcément.



### Définition de l'inclusion entre ensembles

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On dit que  $F$  est **inclus** dans  $E$ /**sous-ensemble** de  $E$ /**une partie** de  $E$  si tous les éléments de  $F$  appartiennent à  $E$ . On note alors  $F \subset E$ .



### Comment démontrer/infirmar une inclusion d'ensemble ?

Pour prouver que  $F \subset E$ , écrire «soit  $x \in F$  (quelconque mais fixé)» puis montrer que  $x \in E$ .  
Pour démontrer que  $F$  n'est pas inclus dans  $E$ , trouver  $x \in F$  tel que  $x \notin E$ .

**Exemples 3.** •  $\{1, 3\} \subset \{1, 3, 4\}$

- Si  $E$  est un ensemble, alors  $\emptyset$  et  $E$  sont toujours deux parties de  $E$ .
- Écrire, si possible, des inclusions entre  $\mathbb{U}_4$ ,  $\mathbb{U}_6$ ,  $\mathbb{U}_{12}$  et  $\mathbb{U}$ .



### Définition de l'égalité de deux ensembles

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles alors on dit que  $E$  et  $F$  sont **égaux** si  $E \subset F$  et  $F \subset E$ . On note alors  $E = F$ .

**Exemple 4.**  $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{b, a, c, c\}$  : l'ordre des éléments et les répétitions n'ont pas d'importance.



### Comment montrer que $E = F$ ?

Très souvent, on montre  $E \subset F$  et  $F \subset E$ .



### Proposition n° 1 : transitivité de l'inclusion

Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois ensembles, si  $E \subset F$  et  $F \subset G$  alors  $E \subset G$ .

## 1.2 Opérations sur les ensembles



### Définition de l'union/de l'intersection de deux ensembles

Soient  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

- L'**union** de  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments qui sont dans  $A$  ou dans  $B$  :  $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- L'**intersection** de  $A$  et  $B$  est l'ensemble des éléments qui sont dans  $A$  et dans  $B$  :  $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$
- On dit que  $A$  et  $B$  sont **disjoints** lorsque  $A \cap B = \emptyset$ . On dit aussi que  $A \cup B$  est une union disjointe.

**Remarques 2.** • On a  $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ . Attention, le «ou» étant inclusif, si  $x \in A \cap B$ , alors  $x \in A \cup B$ .

- Ne confondez pas distincts et disjoints :  $A = \{1, 2\}$  et  $B = \{1, 3\}$  sont distincts mais pas disjoints.



### Proposition n° 2 : propriétés algébrique de l'intersection et de l'union

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B$  et  $C$  trois sous-parties de  $E$ .

1.  $A \cup A = A, A \cap A = A, A \cup E = E, A \cap E = A, A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
2.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  (associativité de  $\cup$ )
3.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$  (associativité de  $\cap$ )
4.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (distributivité de l'union par rapport à l'intersection)
5.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (distributivité de l'intersection par rapport à l'union)

**Remarque 3.**  $A \cup B \cap C$  n'a pas de sens : calculer  $(A \cup B) \cap C$  et  $A \cup (B \cap C)$  avec  $A = \{1, 2\}, B = \{3\}$  et  $C = \{1\}$ .



### Définition d'une union/intersection de plusieurs ensembles

Soient  $A_1, A_2, \dots$  et  $A_n$   $n$  parties de  $E$ . On appelle, **union** de ces parties l'ensemble des  $x$  qui sont dans au moins l'un des  $A_i$  et **intersection** de ces parties l'ensemble des  $x$  qui sont dans tous les  $A_i$  :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in E \mid \exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in E \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x \in A_i\}$$



### Définition d'un recouvrement, d'une partition

On dit que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forment un **recouvrement** de  $E$  si  $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$ .

On dit que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forment une **partition** de  $E$  si tous les  $A_i$  sont non vides, si c'est un recouvrement et si les  $A_i$  sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

**Exemple 5.** Posons  $E_1 = \mathbb{R}_+^*$ ,  $E_2 = \{0\}$  et  $E_3 = \mathbb{R}_-^*$ , alors  $E_1, E_2$  et  $E_3$  forment une partition de  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 4.** On peut aussi faire une union ou une intersection infinie d'ensembles. Ainsi, si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  est une partie de  $E$ , alors on note  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{x \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} \quad x \in E_k\}$  et  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{x \in E \mid \forall k \in \mathbb{N} \quad x \in E_k\}$



### Définition de la différence de deux ensembles

Soient  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . L'ensemble des éléments qui sont dans  $A$  mais pas dans  $B$  est appelé **différence** (ensembliste) de  $A$  par  $B$ . On note  $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ .

**Remarque 5.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$  et  $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$



### Définition du complémentaire d'un sous-ensemble par rapport à un ensemble

Soient  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ . L'ensemble des éléments qui sont dans  $E$  mais pas dans  $A$  est appelé **complémentaire** de  $A$  dans  $E$ . On note  $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$  ou  $\bar{A}$  ou  $A^c$ .



### Proposition n° 3 : propriétés du complémentaire

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

1.  $\overline{\overline{A}} = A$
2.  $\overline{\overline{A}} = A$
3.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
4.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
5.  $A \subset B \iff E \setminus B \subset E \setminus A$



### Définition d'un couple de deux éléments

À partir de deux éléments  $a$  et  $b$ , on forme un nouvel élément appelé **couple**  $(a, b)$  défini de sorte que :  $(a, b) = (a', b')$  ssi  $a = a'$  et  $b = b'$ .

**Exemple 6.**  $(3, 5)$  est un couple,  $(5, 3)$  également, mais  $(3, 5) \neq (5, 3)$  alors que  $\{3, 5\} = \{5, 3\}$ .



### Définition du produit cartésien de deux ensembles

On appelle **produit cartésien** de  $E$  par  $F$  l'ensemble des couples  $(a, b)$  avec  $a$  dans  $E$  et  $b$  dans  $F$  noté  $E \times F$ .

**Exemple 7.** Si  $E = \{1, 2\}$  et  $F = \{2, 3, 4\}$ , alors  $E \times F =$

**Remarque 6.** Si  $E \neq F$ ,  $E \times F \neq F \times E$ . L'ordre des éléments compte dans le couple.



### Définition d'un $n$ -uplet et du produit cartésien de $n$ ensembles

Si  $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$ , alors on introduit un nouvel objet appelé  **$n$ -uplet**  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de sorte que :

$$\forall x_1, y_1 \in E_1, \dots, \forall x_n, y_n \in E_n \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = y_i$$

On note  $E_1 \times \dots \times E_n$  l'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec  $x_i$  parcourant  $E_i$ , pour  $1 \leq i \leq n$ .

**Exemple 8.**  $\mathbb{R}^3$  est l'ensemble des triplets de réels,  $\mathbb{R}^n$  désigne l'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de réels.



### Définition de l'ensemble des parties d'un ensemble

On appelle **ensemble des parties** de  $E$  l'ensemble, noté  $\mathcal{P}(E)$ , qui contient exactement les sous-ensembles de  $E$ .

**Exemples 9.** Calculer  $\mathcal{P}(\{1\})$ ,  $\mathcal{P}(\{1, 2\})$  et  $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ .

**Remarques 7.** •  $\mathcal{P}(E)$  est un ensemble d'ensembles :  $F \in \mathcal{P}(E)$  ssi  $F \subset E$ .

- $\{\emptyset\}$  n'est pas l'ensemble vide mais un ensemble constitué d'un unique élément qui est l'ensemble vide.



### Attention à ne pas confondre inclusion et appartenance

Si  $E = \{1, 2, 3\}$ , alors il est vrai que  $1 \in E$ ,  $\{1\} \subset E$  et que  $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$ . Par contre,  $\{1\} \notin E$  et  $1 \notin \mathcal{P}(E)$ .

## 2 Applications

### 2.1 Définition



### Définition d'une application (ou d'une fonction)

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle **application/fonction** de  $E$  vers  $F$  un procédé  $f$  qui, à tout élément de  $x \in E$ , associe un unique élément dans  $F$ , noté  $f(x)$ .  $E$  est l'**ensemble de départ** et  $F$  est l'**ensemble d'arrivée** de  $f$ . Soit  $x \in E$  et  $y = f(x) \in F$ , on dit que  $y$  est l'**image** de  $x$  par  $f$ , on dit aussi que  $x$  est un **antécédent** de  $y$  par  $f$ . On note  $f: \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$  ou  $f: E \rightarrow F$ . L'ensemble des fonctions de  $E$  vers  $F$  se note  $\mathcal{F}(E, F)$  ou  $F^E$ .

**Exemples 10.** •  $f: \begin{cases} \{-1, 0, 1, 2\} \longrightarrow \{0, 1, 4, 5\} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$  est une fonction.

• La fonction  $\text{Id}_E: \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$  est l'**application identité** de  $E$ .

• Soit  $c \in F$ , la fonction  $\begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto c \end{cases} \in \mathcal{F}(E, F)$  est une **application constante**.

• Soit  $A \subset E$ , on appelle **indicatrice** de  $A$  l'application  $\mathbb{1}_A: \begin{cases} E \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \in \{0, 1\}^E. \end{cases}$

Cette application traduit l'appartenance à la partie  $A$  :  $\forall x \in E \quad x \in A \iff \mathbb{1}_A(x) = 1$



**Péril imminent à ne pas confondre fonction avec élément**

Si  $x \in E$ ,  $f(x)$  n'est pas une fonction,  $f(x)$  n'est qu'un élément de  $F$ .



**Définition du graphe d'une fonction**

On appelle **graphe** de l'application  $f: E \rightarrow F$  l'ensemble  $\{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ .



**Définition de l'égalité de deux fonctions**

On dit que  $f: E \rightarrow F$  est **égal** à  $g: E' \rightarrow F'$  si  $E = E'$ ,  $F = F'$  et si tout  $x \in E$ ,  $f(x) = g(x)$ . On note alors  $f = g$ .



**Définition de la restriction d'une application**

Soient  $f: E \rightarrow F$  et  $A$  une partie de  $E$ . On appelle **restriction** de  $f$  à  $A$  l'application  $f|_A: \begin{cases} A \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$

**Exemple 11.** Les fonctions  $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$  et  $g: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$  sont différentes,  $g$  est la restriction de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .



**Définition d'un prolongement d'une application**

Soit  $f: A \rightarrow F$  avec  $A \subset E$ . On appelle **prolongement** de  $f$  sur  $E$  toute fonction  $g: E \rightarrow F$  telle que  $g|_A = f$  (autrement dit, pour tout  $x \in A$ ,  $g(x) = f(x)$ ).

**Exemple 12.** Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$ . Posons  $g(x) = \begin{cases} 42 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$ , alors  $g$  est un prolongement de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarques 8.** • Lorsqu'on prolonge, il serait donc cohérent de nommer la nouvelle fonction différemment de la fonction d'origine. Cependant, par abus, il se peut que cela ne soit pas le cas dans un sujet de concours.

• Si  $f: E \rightarrow F$  et que  $A \subset E$ , la restriction de  $f$  à  $A$  est unique. En revanche, si  $f: A \rightarrow F$ , il n'y a pas unicité des prolongement de  $f$  sur  $E$ . D'où «la restriction» et «un prolongement».

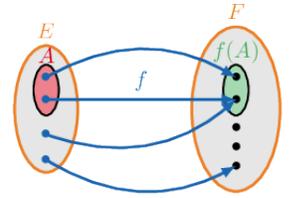
## 2.2 Image directe et image réciproque d'une fonction



### Définition de l'image directe d'une fonction

Soit  $f: E \mapsto F$  et  $A$  une partie de  $E$ , on appelle **image (directe)** de  $A$  par  $f$  l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A \quad y = f(x)\}$$



**Remarques 9.** • L'ensemble  $f(A)$  est défini par paramétrage et par compréhension.

- L'ensemble  $f(A)$  est un sous-ensemble de  $F$  qui tous les  $f(x)$  pour  $x \in A$ .
- Pour  $y \in F$  :

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A \quad y = f(x)$$



### Proposition n° 4 : images directes et inclusion

Soit  $f: E \rightarrow F$ . Soient  $A$  et  $A'$  deux parties de  $E$ . Si  $A \subset A'$  alors  $f(A) \subset f(A')$ .

**Remarque 10.** Soient  $A$  et  $A'$  sont deux parties de  $E$ ,  $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ .

**Exemple 13.** Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ . Déterminer  $f([-1; 2])$  puis  $f(\mathbb{R})$ .



### Attention à ne pas confondre ensemble d'arrivée et image

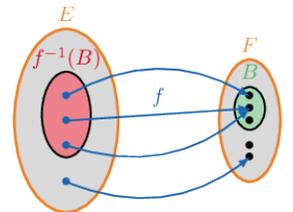
Si  $f: E \rightarrow F$ , il n'y a aucune raison pour que l'image de  $f$  par  $E$  vaille  $F$ , on a seulement  $f(E) \subset F$ .



### Définition de l'image réciproque d'une fonction

Soit  $f: E \rightarrow F$  et  $B$  une partie de  $F$ , on appelle **image réciproque** de  $B$  par  $f$  l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$



**Remarques 11.** • L'ensemble  $f^{-1}(B)$  est défini par compréhension.

- L'ensemble  $f^{-1}(B)$  est une partie de  $E$  qui contient les antécédents par  $f$  de tous les éléments de  $B$ .
- Pour  $x \in E$  :

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

- Si  $f: E \rightarrow F$ , alors  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  et  $f^{-1}(F) = E$ .

**Exemple 14.** Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ . Déterminer  $f^{-1}([-1, 2])$  ainsi que  $f^{-1}([-2; -1])$ .



### Proposition n° 5 : images réciproques et inclusion

Soit  $f: E \rightarrow F$ . Soient  $B$  et  $B'$  deux parties de  $F$ . Si  $B \subset B'$  alors  $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$ .



### Attention il n'y a aucune raison d'avoir $f^{-1}(f(A)) = A$ ou $f(f^{-1}(B)) = B$

Ici,  $f^{-1}$  ne désigne pas la bijection réciproque de  $f$  parce que  $f$  n'est pas forcément bijective.

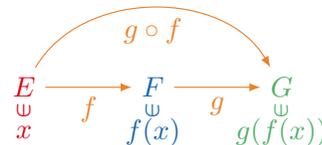
**Exemple 15.** Calculer  $f^{-1}(f([-1; 2]))$  et  $f(f^{-1}([-1; 2]))$  pour  $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ .

## 2.3 Composition de fonctions



### Définition de la composition de fonctions

Soit  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$ . On définit une nouvelle fonction, appelée **composée** de  $g$  et de  $f$ , par  $g \circ f: \begin{cases} E \rightarrow G \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$ .



### Proposition n° 6 : propriétés de la composition

Soit  $f: E \rightarrow F$ ,  $g: F \rightarrow G$  et  $h: G \rightarrow H$  :  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$        $\text{Id}_F \circ f = f$        $f \circ \text{Id}_E = f$

**Remarque 12.** Si  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow E$ , alors on peut à la fois définir  $g \circ f: E \rightarrow E$  et  $f \circ g: F \rightarrow F$ . Cependant, généralement,  $f \circ g \neq g \circ f$ . Si  $f: E \rightarrow E$ ,  $g: E \rightarrow E$  et  $f \circ g = g \circ f$ , on dit alors que  $f$  et  $g$  **commutent**.

**Exemple 16.** Est-ce que  $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 2 \end{cases}$  et  $g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$  commutent ?

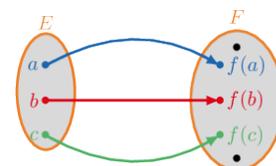
## 2.4 Applications injectives



### Définition de l'application injective

On dit que  $f: E \rightarrow F$  est une **injection/injective** si tout élément de  $F$  a au plus un antécédent par  $f$  :

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$



### Attention à ne pas confondre avec la réciproque :

«  $\forall (x, x') \in E^2 \quad x = x' \implies f(x) = f(x')$  » est vraie pour toutes les fonctions y compris les non injectives.

**Remarques 13.** •  $f$  n'est pas injective ssi

- On peut aussi formuler la définition d'injectivité par contraposée :

**Exemples 17.** Les applications  $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 - 5x \end{cases}$ ,  $g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$ ,  $h: \begin{cases} [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$  sont-elles injectives ?



### Proposition n° 7 : une application strictement monotone est injective

Si  $A \subset \mathbb{R}$  et que  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement monotone, alors  $f$  est injective.



### Proposition n° 8 : composée de deux injections

Si  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$  sont deux fonctions injectives, alors  $g \circ f: E \rightarrow G$  est injective.

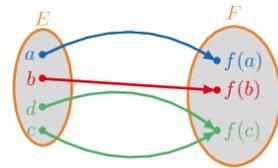
## 2.5 Applications surjectives



### Définition d'une application surjective

On dit que  $f: E \rightarrow F$  est une **surjection/surjective** si tout élément de  $F$  a au moins un antécédent par  $f$  :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$



**Exemples 18.** Les applications  $f: \begin{cases} [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ ,  $g: \begin{cases} [0; \pi] \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$  sont-elles surjectives ? Si l'une l'est et pas l'autre, c'est bien parce qu'en dépit des apparences, ce sont deux applications différentes.

**Remarques 14.** • Pour justifier la surjectivité de  $f: E \rightarrow F$ , il suffit, pour chaque  $y \in F$ , de justifier l'existence d'une solution à l'équation  $y = f(x)$ .

- $f: E \rightarrow F$  n'est pas surjective si :
- $f: E \rightarrow F$  est surjective est équivalent à  $f(E) = F$ .
- Si  $f: E \rightarrow F$ , alors nécessairement  $g: \begin{cases} E \longrightarrow f(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$  est surjective.



### Proposition n° 9 : composée de deux surjections

Si  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$  sont deux fonctions surjectives, alors  $g \circ f: E \rightarrow G$  est surjective.

## 2.6 Applications bijectives

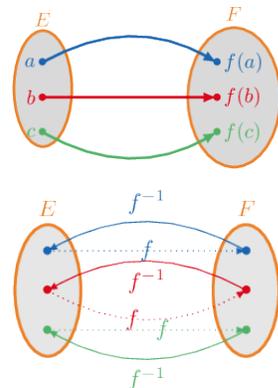


### Définition d'une application bijective et de son application réciproque

On dit que  $f: E \rightarrow F$  est une **bijection/bijective** si tout élément de  $F$  a exactement un antécédent par  $f$  :

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$$

Si  $f$  est bijective, pour tout  $y \in F$ , il existe un unique  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ , on pose  $f^{-1}(y) = x$ . Ceci définit une application  $f^{-1}: F \rightarrow E$  appelée **bijection réciproque** de  $f$ .



**Exemples 19.**  $f: \begin{cases} [0; \pi] \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$  est bijective, contrairement à  $g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ .



### Proposition n° 10 : caractérisation de la bijectivité

Soit  $f: E \rightarrow F$ . On a équivalence entre :

1.  $f$  est bijective.
2.  $f$  est injective et surjective.
3.  $\exists g \in \mathcal{F}(F, E) \mid g \circ f = \text{Id}_E$  et  $f \circ g = \text{Id}_F$ .

Si c'est le cas, nécessairement un tel  $g$  est unique et vaut  $g = f^{-1}$ .

**Remarques 15.** • Si  $f: E \rightarrow F$  est bijective, alors  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$  et  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ .

- La proposition 11 montrera que  $f^{-1}: F \rightarrow E$  est bijective ce qui justifiera le nom de **bijection réciproque**.
- Si  $f$  est strictement monotone sur un intervalle  $I$ , le théorème de la bijection strictement monotone affirmait que  $f: I \rightarrow f(I)$  était bijective, mais c'est la conséquence immédiate de la proposition 7 et de la remarque 14.

**Proposition n° 11 : propriétés de la bijection réciproque**

1. Si  $f: E \rightarrow F$  est bijective alors  $f^{-1}: F \rightarrow E$  est bijective et  $(f^{-1})^{-1} = f$
2. Si  $f: E \rightarrow F$  et  $g: F \rightarrow G$  sont bijectives alors  $g \circ f: E \rightarrow G$  aussi et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .
3. Si  $f: E \rightarrow F$  est bijective et  $B \subset F$ , alors  $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$  *(c'est pas du troll)*

**Quels sont les méthodes pour montrer que  $f: E \rightarrow F$  est bijective ?**

1. Fixer  $y \in F$  et démontrer que l'équation, d'inconnue  $x$ ,  $f(x) = y$  admet une unique solution dans  $E$ .
2. Montrer que  $f$  est injective et surjective.
3. Écrire  $f$  comme une composée de fonctions bijectives.
4. Trouver  $g: F \rightarrow E$  telle que  $g \circ f = \text{Id}_E$  et  $f \circ g = \text{Id}_F$ .
5. Si  $f: I \rightarrow J$  est continue et strictement monotone, alors  $f$  est bijective ssi  $f(I) = J$  (avec  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ )

**Exemple 20.** Démontrer que  $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + 2y + 3, 2x + 3y - 8) \end{cases}$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

**Attention préciser les ensembles de départ et d'arrivée pour les injections/surjections/bijections**

Certains fonctions ont la particularité d'être injectives/surjectives/bijjectives uniquement parce que les ensembles de départ et d'arrivée sont cohérents. Méditez les exemples 17, 18 et 19.