



Dans ce chapitre, après avoir étudié les nombres réels, nous allons étudier les suites numériques. Nous donnerons des définitions précises de la limite d'une suite et cela nous permettra de démontrer les théorèmes sur les suites de façon rigoureuse.



Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Nombres réels | 2 |
| 1.1 | Inégalités dans \mathbb{R} | 2 |
| 1.2 | Majorant/minorant/maximum/minimum/borne supérieure/borne inférieure | 2 |
| 1.3 | Intervalles de \mathbb{R} | 3 |
| 1.4 | Partie entière | 4 |
| 2 | Suites | 4 |
| 2.1 | Définition d'une suite | 4 |
| 2.2 | Sens de variation d'une suite | 5 |
| 2.3 | Suites majorées, minorées et bornées | 5 |
| 2.4 | Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou 2 | 6 |
| 2.4.1 | Suite arithmétique | 6 |
| 2.4.2 | Suite géométrique | 6 |
| 2.4.3 | Suites arithmético-géométrique | 6 |
| 2.4.4 | Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 | 6 |
| 2.5 | Limite d'une suite réelle | 7 |
| 2.5.1 | Convergence et divergence | 7 |
| 2.5.2 | Opérations sur les limites | 8 |
| 2.5.3 | Théorèmes d'existence de limite | 9 |
| 2.5.4 | Suites extraites | 10 |
| 2.6 | Étude des suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$ | 11 |
| 2.7 | Extension aux suites complexes | 11 |
| 2.8 | Relations de comparaison | 13 |
| 2.8.1 | Relation de négligeabilité | 13 |
| 2.8.2 | Relation de domination | 13 |
| 2.8.3 | Relation d'équivalence | 14 |

1 Nombres réels

1.1 Inégalités dans \mathbb{R}



Proposition n° 1 : compatibilité des inégalités avec les opérations

On rappelle que les inégalités dans \mathbb{R} sont compatibles avec les opérations, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$:

1. $a \leq b$ et $c \leq d \implies a + c \leq b + d$
2. $a \leq b$ et $c < d \implies a + c < b + d$
3. $c \geq 0$ et $a \leq b \implies ac \leq bc : x \mapsto cx$ est croissante
4. $c \leq 0$ et $a \leq b \implies bc \leq ac : x \mapsto cx$ décroît
5. $0 < a \leq b \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} : x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur \mathbb{R}_+^*
6. $a \leq b < 0 \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} : x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur \mathbb{R}_-^*
7. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$

1.2 Majorant/minorant/maximum/minimum/borne supérieure/borne inférieure



Définition d'un majorant

Soit A une partie de \mathbb{R} .

- On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de A si : $\forall a \in A \quad a \leq M$
- On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de A si : $\forall a \in A \quad m \leq a$
- On dit que A est **majorée** si elle a un majorant. C'est-à-dire si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leq M$
- On dit que A est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée :

$$A \text{ bornée} \iff \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall a \in A \quad m \leq a \leq M$$

Exemple 1. L'intervalle $[0; 1[$ est

L'intervalle $]0; 1[$ est

L'intervalle \mathbb{R}_+ est

L'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est



Attention il n'y a pas unicité du majorant/minorant

➤ On dit donc «un majorant», «un minorant» et non «le majorant».



Définition d'un maximum/minimum

Soient A une partie de \mathbb{R} et $(M, m) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que M est le **maximum** (ou le plus grand élément) de A si $M \in A$ et M est un majorant de A . On note $M = \max(A)$.
- On dit que m est le **minimum** (ou le plus petit élément) de A si $m \in A$ et m est un minorant de A . On note $m = \min(A)$.
- Un **extremum** de A est le maximum ou le minimum de A .

Remarque 1. Si le maximum/minimum de A existe alors il est unique.

Exemple 2. Si $A \subset \mathbb{R}$ avec A non vide et ayant un nombre fini d'éléments, alors A admet un maximum et un minimum.



Définition d'une borne supérieure/inférieure

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .

On appelle **borne supérieure** de A le plus petit des majorants de A (s'il existe). On le note $\sup A$.

On appelle **borne inférieure** de A le plus grand des minorants de A (s'il existe). On le note $\inf A$.

Remarque 2. Si la borne supérieure/inférieure existe alors elle est unique.



Théorème n° 1 : de la borne supérieure/inférieure

(admis)

- Toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Remarque 3. Une borne supérieure n'est pas nécessairement un maximum. Une borne inférieure n'est pas nécessairement un minimum. Si A n'est pas majorée, alors, par convention $\sup A = +\infty$. Si A n'est pas minorée, par convention, $\inf A = -\infty$.

Exemple 3. Compléter le tableau ci-dessous. Démontrer rigoureusement la ligne $E = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

| Ensemble E | $\min(E)$ | $\inf(E)$ | $\max(E)$ | $\sup(E)$ |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $E = \{0\}$ | | | | |
| $E = \{0; 1\}$ | | | | |
| $E =]0; 1[$ | | | | |
| $E = [0; 1[$ | | | | |
| $E = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ | | | | |
| $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ | | | | |
| $E = [0; 1[\cap \mathbb{Q}$ | | | | |



Proposition n° 2 : lien entre bornes supérieures/inférieures et extrema

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .

1. Si A admet un plus grand élément alors elle admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$.
2. Si A admet un plus petit élément alors elle admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.

Exemple 4. Étudier l'ensemble $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ (bornes et extremums).



Proposition n° 3 : cas des parties de \mathbb{Z}

1. Soit A une partie de \mathbb{Z} non vide, alors A admet un minimum ssi elle est minorée.
2. Soit A une partie de \mathbb{Z} non vide, alors A admet un maximum ssi elle est majorée.
3. Soit A une partie de \mathbb{N} non vide, alors A admet un minimum.

1.3 Intervalles de \mathbb{R}



Définition des intervalles de \mathbb{R}

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. On appelle intervalles de \mathbb{R} les sous-ensembles de \mathbb{R} suivants :

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ intervalle **fermé borné** ou **segment**
- $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ intervalle **ouvert borné**
- $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ intervalle **borné semi-ouvert** ou **semi-fermé**
- $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, $]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ intervalle **minoré et non majoré**
- $] -\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$, $] -\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ intervalle **majoré et non minoré**
- \mathbb{R} **non majoré, non minoré** \emptyset **intervalle vide**, intervalles **ouverts** et **fermés**



Proposition n° 4 : caractérisation des intervalles

Soit I une partie de \mathbb{R} . Alors : I est un intervalle de $\mathbb{R} \iff \forall (x, y) \in I^2 \quad x \leq y \implies [x; y] \subset I$

Remarque 4.

- Les intervalles de \mathbb{R} sont donc les parties en un seul morceau.
- L'intersection d'intervalles est un intervalle et l'union de deux intervalles non disjoints est un intervalle.
- $[0; 1] \cup [2; 3[$ n'est pas un intervalle.
- \mathbb{Q} n'est pas un intervalle de \mathbb{R} .

1.4 Partie entière



Définition de la partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x le plus grand entier relatif p tel que $p \leq x$. On la note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 5. $\lfloor e \rfloor =$ $E(-\pi) =$ $E(-3) =$ $E(1/3) =$



Proposition n° 5 : propriétés de la partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

1. $E(x) \leq x < E(x) + 1$
2. $x - 1 < E(x) \leq x$
3. $n \leq x \iff n \leq E(x)$
4. $E(x + n) = E(x) + n$
5. $n \leq x < n + 1 \iff n = E(x)$
6. $x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$

2 Suites

2.1 Définition d'une suite



Définition d'une suite numérique réelle ou complexe

Une **suite numérique réelle** est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} ; $u: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{cases}$.

Une **suite numérique complexe** est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{C} ; $u: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto u(n) \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ est noté u_n et est appelé n -ième **terme** de la suite (ou **terme d'indice** n ou de **rang** n) et la suite u est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$. L'ensemble des suites réelles (resp. complexes) est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$).



Attention à ne pas confondre suite et nombre

$u = (u_n)$ est une suite, u_n est un nombre pour n donné. Tout comme, f est une fonction et $f(x)$ est un nombre.

Remarque 5. La suite (u_n) est parfois définie à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Ainsi, $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie à partir de 1.



Définition des différentes façons de définir une suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ est définie

1. **explicitement** si le terme u_n est défini en fonction de n .
2. **implicitement** si le terme u_n est défini comme l'unique réel vérifiant une certaine propriété.
3. **par récurrence** si le terme u_n est défini à partir des termes précédents de la suite u .

- Exemple 6.**
1. La suite $(u_n)_n$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(n^2 + 1)$.
 2. La suite $(v_n)_n$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est l'unique solution réelle de $x^3 + x - 1 = n$.
 3. La suite $(w_n)_n$ définie par : $w_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $w_{n+1} = \sqrt{w_n + 2}$.

Remarque 6. L'étude d'une suite est souvent plus simple si elle est définie explicitement.



Définition des opérations sur les suites

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

1. La somme de u et v est la suite notée $u + v$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u + v)_n = u_n + v_n$.
2. Le produit de u et v est la suite, notée $u \times v$, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u \times v)_n = u_n \times v_n$.
3. Le produit de u par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la suite notée, λu , définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda u)_n = \lambda u_n$.
4. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, le quotient de u par v est la suite, notée $\frac{u}{v}$, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{u_n}{v_n}$.

2.2 Sens de variation d'une suite



Définition de la variation d'une suite

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que la suite u est **croissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1}$$

On dit que la suite u est **strictement croissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$$

On dit que la suite u est **décroissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$$

On dit que la suite u est **strictement décroissante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$$

- Exemples 7.**
- Soit $u_n = f(n)$ où $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est monotone sur \mathbb{R}_+ , alors (u_n) est de même monotonie.
 - Quel est le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = n!/n^n$?

2.3 Suites majorées, minorées et bornées



Définition d'une suite majorée/minorées/bornées

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.

1. On dit que la suite u est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$
2. On dit que la suite u est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n$
3. La suite u est **bornée** lorsqu'elle est minorée et majorée : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n \leq M$



Proposition n° 6 : caractérisation des suites bornées

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Exemple 8. Montrer que la somme et le produit de suites bornées sont bornées.



Définition d'une suite stationnaire

La suite u est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n$

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou 2

Remarque 7. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et on prend des suites à valeurs complexes ou réelles.

2.4.1 Suite arithmétique



Définition d'une suite arithmétique

| Soit $r \in \mathbb{K}$, on dit que la suite u est **arithmétique** de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Remarque 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et deux entiers n et m , alors

$$u_n = u_m + (n - m)r$$



Proposition n° 7 : somme des termes d'une suite arithmétique

| Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique et deux entiers $m \leq n$, alors

$$\sum_{k=m}^n u_k = \frac{(u_m + u_n)}{2} (n - m + 1)$$

2.4.2 Suite géométrique



Définition d'une suite géométrique

| Soit $q \in \mathbb{K}$, on dit que la suite u est **géométrique** de raison q si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times q$$

Remarque 9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et deux entiers n et m , alors

$$u_n = u_m \times q^{n-m}$$



Proposition n° 8 : somme de termes d'une suite géométrique

| Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et deux entiers $n \geq m$ alors

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$$

2.4.3 Suites arithmético-géométrique



Définition d'une suite arithmético-géométrique

| On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** si :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$$



Comment trouver l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique ? (avec $a \neq 1$)

1. Chercher le point fixe c de l'équation : $c = ac + b$.
2. Poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - c$ et montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Déterminer l'expression générale de v_n .
4. En déduire l'expression générale de u_n .

Exemple 9. Trouver la limite de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

2.4.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2



Définition d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

| On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Pour une telle suite, l'équation $r^2 = ar + b$ est appelée **équation caractéristique**.



Théorème n° 2 : expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients dans \mathbb{K}

Soit $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. Notons $E_{\mathbb{K}} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ et Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

1. Si l'équation caractéristique admet deux racines dans \mathbb{K} r_1 et r_2 ($\Delta > 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta \neq 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :

$$E_{\mathbb{K}} = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists (A, B) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n\}$$

2. Si l'équation caractéristique admet une racine double r_1 ($\Delta = 0$) :

$$E_{\mathbb{K}} = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists (A, B) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (An + B)r_1^n\}$$

3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, notons $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ les deux racines complexes de l'équation caractéristique :

$$E_{\mathbb{R}} = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))\}$$

Si $(u_n)_n \in E_{\mathbb{K}}$, A et B sont uniques, on les détermine grâce à deux valeurs de la suite (en général u_0 et u_1).

Exemple 10. Expression du terme général de la suite de Fibonacci définie par $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$

2.5 Limite d'une suite réelle

Remarque 10. Dans cette partie, nous ne considérerons que des suites réelles.

2.5.1 Convergence et divergence



Définition de la convergence d'une suite

1. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$, et on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ (ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$) si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** s'il existe un réel ℓ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
3. Une suite non convergente est dite **divergente**. On dit que la suite **diverge**.

FIGURE 1 – Les termes de la suite sont dans le tube rouge entre $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang n_0 .

Exemple 11. Soit $u_n = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.



Proposition n° 9 : unicité de la limite

Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors sa limite est unique.

Exemple 12. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ alors $|u_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} |\ell|$.



Proposition n° 10 : une suite convergente est bornée

Toute suite réelle convergente est bornée.

Remarque 11. Par contraposée, on en déduit qu'une suite non bornée est divergente.

La réciproque n'est pas vraie ! Une suite bornée ne converge pas nécessairement. Comme la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n =$



Définition d'une limite infinie

1. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$), et on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n \geq A$$

2. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$), et on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n \leq A$$

Remarque 12. Une suite divergente n'a pas nécessairement de limite infinie : considérer $u_n = (-1)^n n$.

Exemple 13. Soit $u_n = n$ pour $n \in \mathbb{N}$, démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2.5.2 Opérations sur les limites



Proposition n° 11 : opérations sur les limites finies

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles telles que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{R}, v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell' \in \mathbb{R}$.

1. $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell + \ell'$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda \ell$
3. $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \ell'$
4. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, alors $u_n w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$



Proposition n° 12 : règles opératoires sur les limites infinies

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui diverge vers $+\infty$.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minorée alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minorée par un réel strictement positif $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

Remarque 13. • On déduit des règles précédentes les tableaux ci-dessous :

| | | | |
|--|-----------|------------------------|-----------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ | $-\infty$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | FI |
| $\ell \in \mathbb{R}$ | $-\infty$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | FI | $+\infty$ | $+\infty$ |

(a) Limites de la somme de deux suites suivant leur limite.

| | | | | | |
|--|-----------|----------------------------|-----------|----------------------------|-----------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ | $-\infty$ | $\ell' \in \mathbb{R}_-^*$ | 0 | $\ell' \in \mathbb{R}_+^*$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | FI | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell \in \mathbb{R}_-^*$ | $+\infty$ | $\ell \times \ell'$ | 0 | $\ell \times \ell'$ | $-\infty$ |
| 0 | FI | 0 | 0 | 0 | FI |
| $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ | $-\infty$ | $\ell \times \ell'$ | 0 | $\ell \times \ell'$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | FI | $+\infty$ | $+\infty$ |

(b) Limites du produit de deux suites suivant leur limite.

- Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ et $\ell > 0$ (resp $\ell < 0$), alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0, u_n > 0$ (resp. $u_n < 0$).



Proposition n° 13 : limite de l'inverse

Soit $(u_n)_n$ une suite ayant une limite ℓ .

1. Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\ell}$.
2. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
3. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang (resp. $u_n < 0$) alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque 14. Pour la limite du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ on écrit $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers 0 (ou toutes les deux vers $+\infty$), alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une forme indéterminée.



Théorème n° 3 : les inégalités larges sont conservées par passage à la limite

Soient $(m, M) \in \mathbb{R}^2$, soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' .

1. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.
2. Si $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq M$.
3. Si $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geq m$.



Péril imminent : les inégalités larges passent à la limite pas les strictes

Cela ne marche pas avec des inégalités strictes. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} > 0$ sans que $0 > 0$.

2.5.3 Théorèmes d'existence de limite



Théorème n° 4 de comparaison

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

1. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.
2. Si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$ alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$.

Remarque 15. Si l'on pense qu'une suite diverge vers $+\infty$, on essaie de la minorer par une suite qui diverge vers $+\infty$. Si l'on pense qu'une suite diverge vers $-\infty$, on essaie à la majorer par une suite qui diverge vers $-\infty$.

Exemple 14. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n \sqrt{n} + n$?



Théorème n° 5 d'encadrement

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

Exemple 15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k}$. Par encadrement, étudier la convergence de $(u_n)_n$.



Définition de l'approximation décimale

Le décimal $a_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près**.

Le décimal $b_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}$ est appelé **approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près**.

Exemple 16. Si $x = \pi$, alors : $a_0 = \frac{\lfloor 10^0 \pi \rfloor}{10^0} = \frac{3}{1} = 3$, $a_1 = \frac{\lfloor 10^1 \pi \rfloor}{10^1} = \frac{31}{10} = 3.1$, $a_2 = \frac{\lfloor 10^2 \pi \rfloor}{10^2} = \frac{314}{100} = 3.14$, $b_0 = a_0 + 1 = 4$, $b_1 = a_1 + 0.1 = 3.2$, $b_2 = a_2 + 0.01 = 3.15$



Théorème n° 6 : approximations décimales d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x < b_n$, $(a_n, b_n) \in \mathbb{D}^2$ et $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$, $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$

Remarque 16. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels qui tend vers x . On dit que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .



Théorème n° 7 de convergence monotone

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle monotone.

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors elle converge vers $\sup\{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors elle converge vers $\inf\{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
4. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

Remarque 17. Ceci permet de prouver l'existence d'une limite finie ℓ mais pas de la trouver !

Exemple 17. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante et positive, alors d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge mais pas nécessairement vers 0.



Définition des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que ces suites sont **adjacentes** si :

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît.
2. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît.
3. $v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.



Théorème n° 8 des suites adjacentes

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.



Exemple classique de suites adjacentes

Montrer que les suites $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

2.5.4 Suites extraites



Définition d'une suite extraite

Soit $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On dit que $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite extraite/sous-suite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 18. Les suites extraites les plus utilisées sont les suites d'indices pairs $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et d'indices impairs $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.



Théorème n° 9 : si une suite admet une limite, alors toute sous-suite admet la même limite

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Alors, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ pour toute $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque 19. Pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite, on peut raisonner par l'absurde et considérer plusieurs extractions qui auront des limites différentes.

Exemple 18. Montrer que $((-1)^n)_n$ diverge.



Proposition n° 14 des suites extraites d'indices pairs et impairs

Si les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers ℓ alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

2.6 Étude des suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans cette partie, $f: I \rightarrow I$. On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.



Définition d'un intervalle stable

On dit que l'intervalle I est **stable** par f si $f(I) \subset I$.

Remarque 20. Pour montrer qu'un intervalle est stable, on peut étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations ou bien directement à l'aide d'inégalités. Si I est stable par f , alors cela revient à écrire $f: I \rightarrow I$.



Proposition n° 15 de l'intervalle stable

Soit $f: I \rightarrow I$. Si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.



Proposition n° 16 : variation de (u_n) dans le cas f croissante

Soit $f: I \rightarrow I$ croissante sur I et $u_0 \in I$. Si $u_1 \geq u_0$, alors (u_n) est croissante. Si $u_1 \leq u_0$, alors (u_n) est décroissante.

Remarque 21. Si f est décroissante sur I alors $g = f \circ f$ est croissante sur I et les suites extraites des termes pairs et des termes impairs sont monotones.



Théorème n° 10 du point fixe

Soit $f: I \rightarrow I$ et $u_0 \in I$. Si la suite (u_n) , définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers $\ell \in I$ et que f est continue en ℓ alors $\ell = f(\ell)$ (on dit que ℓ est un point fixe de f).

Exemple 19. Soit $(u_n)_n$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. Étudier la convergence de $(u_n)_n$.

2.7 Extension aux suites complexes

On peut étendre aux suites complexes les notions des suites réelles qui n'utilisent pas la notion d'ordre sur \mathbb{R} (les notions de suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées etc. n'existent pas pour les suites complexes!). En revanche, la valeur absolue peut être remplacée par le module.



Définition d'une suite bornée

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.



Définition d'une limite d'une suite complexe

On dit qu'une suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |z_n - \ell| < \varepsilon$$

(a) f est croissante et une suite récurrente associée qui est croissante et divergente. (b) f est croissante et une suite récurrente associée qui est décroissante et convergente vers un point fixe.

(c) f est décroissante et une suite récurrente associée $(u_n)_n$, $(u_{2n})_n$ croissante, $(u_{2n+1})_n$ est décroissante et elles convergent vers le même point fixe de $f \circ f$, ainsi $(u_n)_n$ converge. (d) f est décroissante et une suite récurrente associée $(u_n)_n$, $(u_{2n})_n$ est croissante, $(u_{2n+1})_n$ est décroissante et elles convergent vers des points fixes de $f \circ f$ différents, ainsi $(u_n)_n$ diverge.

FIGURE 2 – Tracés de plusieurs suites récurrentes.

Remarque 22. $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ ssi $|z_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.



Proposition n° 17 : convergence des suites complexes en fonction des parties réelles et imaginaires

Une suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ssi $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. De plus, si c'est le cas :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(z_n)$$



Exemple des suites géométriques

Soit $z \in \mathbb{C}$, considérons la suite géométrique $(z^n)_n$ de raison z :

1. Si $|z| < 1$, alors $z^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$
2. Si $|z| > 1$, alors $(z^n)_n$ est non bornée donc diverge.
3. Si $z = 1$, alors $z^n = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.
4. Si $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, alors $(z^n)_n$ est bornée et diverge.

Remarque 23. En résumé :

| Ce qui reste valable | Ce qui n'est plus valable |
|--|------------------------------------|
| Unicité de la limite | Majorant/Minorant |
| Une suite convergente est bornée | Monotonie |
| Opérations sur les limites finies | Limites infinies |
| Suites extraites | Passage à la limite des inégalités |
| Suites arithmétiques et géométriques | Théorème des gendarmes |
| Suites arithmético-géométriques | Théorème de la limite monotone |
| Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 | Suites adjacentes |

2.8 Relations de comparaison

Dans cette partie, quand on fera le quotient de deux suites, c'est qu'on supposera implicitement, que celle au dénominateur ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

2.8.1 Relation de négligeabilité



Définition de la relation de négligeabilité

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.

Remarque 24. Sans division : $u_n = o(v_n) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$

Exemple 20. • $n^2 = o(n)$? $n = o(n^2)$? $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{n^2})$? $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$?

- Montrer que $\ln n = o(n)$.
- $u_n = o(1)$ ssi
- Traduire $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ avec une relation de négligeabilité.



Proposition n° 18 : croissances comparées interprétées avec les o

1. Pour $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$ et $(\ln n)^\alpha = o((\ln n)^\beta)$.
2. Pour $0 < a < b$, $a^n = o(b^n)$.
3. Pour $\alpha, \beta > 0$ et $\gamma > 1$, $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$, $n^\beta = o(\gamma^n)$, $n^\beta = o(e^{\alpha n})$, $\gamma^n = o(n!)$, $n! = o(n^n)$.

2.8.2 Relation de domination



Définition de la relation de domination

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **dominée** devant une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $(\frac{u_n}{v_n})_n$ est bornée. On note alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Remarque 25. Sans division : $u_n = \mathcal{O}(v_n) \iff \exists n_0 \in \mathbb{N} \exists M \in \mathbb{R} \forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq M |v_n|$

Exemple 21. • $u_n = o(v_n) \implies u_n = \mathcal{O}(v_n)$

- Écrire $u_n = \mathcal{O}(1)$ ssi
- Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. A-t-on $u_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$? $u_n = o(\frac{1}{n})$?



Attention à la notation

$u_n = \mathcal{O}(w_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ n'impliquent en rien $u_n = v_n$!
La relation $u_n = \mathcal{O}(w_n)$ veut dire que (u_n) fait partie de l'ensemble des suites dominées par (w_n) .

2.8.3 Relation d'équivalence



Définition de la relation d'équivalence

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **équivalente** à une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Remarque 26. Sans division : $u_n \sim v_n \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$.

Exemple 22. • Démontrer que $n^2 + 5n \sim n$

- Si $\ell \neq 0$, alors : $u_n \sim \ell$ ssi u_n
- Déterminer un équivalent simple de $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$



Péril imminent pas d'équivalent à 0

On n'écrit jamais $u_n \sim 0$ car cela n'a pas de sens, tout comme $u_n \sim +\infty$



Proposition n° 19 : propriétés des équivalents

- | | |
|--|---|
| 1. $u_n \sim u_n$ (réflexivité) | 2. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$ (symétrie) |
| 3. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$ (transitivité) | 4. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ |
| 5. $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + \mathcal{O}(v_n)$ | 6. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ |
| 7. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ alors | $u_n w_n \sim v_n z_n$ $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{z_n}$ $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ |



Péril imminent pas de sommes d'équivalents

Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$, vous ne pouvez pas en déduire que $u_n + w_n \sim v_n + z_n$. Prenons $u_n = n$, $v_n = n + 1$, $w_n = -n - 1$ et $z_n = -n$.